Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 16 Luglio 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e il sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^4$.

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 + hv_2 + v_3 \\ f(v_2) &= 2v_1 - v_2 + v_3 \\ f(v_3) &= -2hv_2 - v_3 \end{aligned}$$

   Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. È dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$g(x, y, z, t) = (hx + hz - ht, (h-1)y + hz, x - z, (h-1)y),$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcolare $g(V)$ e $g(V) \cap V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone in ciascun caso una base. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $g(V) \cap V = \mathcal{L}(v_1, v_2 + v_3)$.

Soluzione

1. Osserviamo facilmente che $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V, in quanto i 3 vettori sono linearmente indipendenti, essendo la seguente matrice ridotta di rango 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Inoltre, è anche facile vedere che:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h & -1 & -2h \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ h & -1-T & -2h \\ 1 & 1 & -1-T \end{vmatrix} =$$
$$= (1-T)(-1-T)^2 - 4h + 2h + 2hT + 2h - 2hT = (1-T)(-1-T)^2.$$

   Quindi, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Ricordiamo che f è semplice se allo stesso momento si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Dal momento che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, si ha chiaramente che $\dim V_1 = m_1 = 1$. Per quanto riguarda l'altro autovalore -1, sappiamo che $1 \le \dim V_{-1} \le m_{-1} = 2$ e che $V_{-1} = \ker f_{-1}$, essendo $f_{-1} = f + i$. Dunque:

$$M^{\mathcal{A}}(f_{-1}) = M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ h & 0 & 2h \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ h & 0 & -2h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0$ si ha che $\rho(M^{\mathcal{A}})(f_{-1}) = 2$, per cui $\dim V_{-1} = \dim \ker f_{-1} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h \neq 0$ f non è semplice e, dunque, non è possibile determinare una base di autovettori. Invece, per $h = 0$ abbiamo $\rho(M^{\mathcal{A}})(f_{-1}) = 1$, per cui $\dim V_{-1} = \dim \ker f_{-1} = 3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Ciò vuol dire che per $h = 0$ f è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Dalla riduzione precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\, a+b=0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,-a,c)\} = \\ &= \mathcal{L}((1,-1,0)_{\mathcal{A}}, (0,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(v_1 - v_2, v_3) = \mathcal{L}((0,-1,-1,-1),(0,0,0,1)). \end{aligned}$$

Determiniamo, ora, l'autospazio V_1 in maniera analoga, sempre nel caso $h = 0$. Sappiamo che $V_1 = \ker f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\, 2b=0,\, a-2c=0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (2c,0,c)\} = \\ &= \mathcal{L}((2,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(2v_1 + v_3) = \mathcal{L}((2,-2,0,1)). \end{aligned}$$

Quindi, per $h = 0$ una base di autovettori è $[(0,-1,-1,-1),(0,0,0,1),(2,-2,0,1)]$.

2. Calcoliamo subito l'equazione cartesiana di V:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

Quindi:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}.$$

Inoltre, essendo $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, si ha $g(V) = \mathcal{L}(g(v_1), g(v_2), g(v_3))$. Dall'assegnazione di g vediamo allora che:

$$g(V) = \mathcal{L}((h,1-h,1,1-h),(h,h,0,0),(-h,0,0,0)).$$

Cominciamo col determinare $\dim g(V)$:

$$\begin{pmatrix} h & 1-h & 1 & 1-h \\ h & h & 0 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo subito che per $h \neq 0$ si ha $\dim g(V) = 3$, mentre per $h = 0$ si ha $\dim g(V) = 1$.

Sia $h \neq 0$. Una base di $g(V)$ è data da $[(h,1-h,1,1-h),(h,h,0,0),(-h,0,0,0)]$ o, essendo $h \neq 0$, anche da $[(h,1-h,1,1-h),(1,1,0,0),(1,0,0,0)]$. Da:

$$\det \begin{pmatrix} h & 1-h & 1 & 1-h \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (h-1)z + t = 0.$$

Dunque:
$$g(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h-1)z + t = 0\}$$
e
$$\begin{aligned} g(V) \cap V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h-1)z + t = 0,\ x+y-z=0\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -y+z,\ t = (1-h)z\} = \{(-y+z, y, z, (1-h)z) \in \mathbb{R}^4\} = \\ = \mathcal{L}((-1,1,0,0),(1,0,1,1-h)). \end{aligned}$$

Dunque, $g(V) \cap V$ ha dimensione 2 per $h \neq 0$ e una sua base è $[(-1,1,0,0),(1,0,1,1-h)]$. Per quanto riguarda il sottospazio $\mathcal{L}(v_1, v_2+v_3)$, osserviamo che naturalmente si ha $\dim \mathcal{L}(v_1, v_2+v_3) = 2$, perché altrimenti v_1, v_2 e v_3 sarebbero linearmente dipendenti. Inoltre, $\mathcal{L}(v_1, v_2+v_3) \subseteq g(V) \cap V$ se e solo se v_1 e v_2+v_3 verificano le sue equazioni cartesiane:
$$v_1 = (1,-1,0,0) \in g(V) \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} 0+0=0 \\ 1-1+0=0 \end{cases} \text{verificato per ogni } h \in \mathbb{R}$$
$$v_2+v_3 = (1,0,1,2) \in g(V) \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} h-1+2=0 \\ 1+0-1=0 \end{cases} \Rightarrow h = -1.$$
Dunque, per $h = -1$ si ha $\mathcal{L}(v_1, v_2+v_3) \subseteq g(V) \cap V$ e, essendo $\dim L(v_1, v_2+v_3) = \dim(g(V) \cap V) = 2$, si ha che necessariamente $\mathcal{L}(v_1, v_2+v_3) = g(V) \cap V$.

Sia $h = 0$. In tal caso, abbiamo che $g(V) = \mathcal{L}((0,1,1,1))$, il che vuol dire che $[(0,1,1,1)]$ è una sua base. Inoltre, si vede facilmente che $(0,1,1,1) \in V$, in quanto verifica la sua equazione cartesiana. Ciò vuol dire che $g(V) \subseteq V$ e, conseguentemente $g(V) \cap V = g(V)$. In questo caso, è chiaramente impossibile che possa essere $\mathcal{L}(v_1, v_2+v_3) = g(V) \cap V$, in quanto $\dim L(v_1, v_2+v_3) = 2$, mentre $\dim(g(V) \cap V) = 1$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati il punto $P = (1,0,0)$, il piano $\pi\colon x+y=0$ e la retta
$$r\colon \begin{cases} x-y+1=0 \\ y+z-1=0. \end{cases}$$
Calcolare la distanza $d(P,r)$, determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r e la retta s ortogonale a r, parallela al piano π e passante per P.

2. Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2hxy + 4y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0.$$

Soluzione

1. Determiniamo il piano α passante per P e ortogonale a r e, successivamente il punto $H = \alpha \cap r$, dato che $d(P,r) = \overline{PH}$. Osservato che la retta r ha parametri direttori $(1,1,-1)$, il piano α è ortogonale al vettore di componenti $(1,1,-1)$ e, dovendo passare per il punto P, si vede che $\alpha\colon x+y-z-1=0$. Dunque:
$$H = \alpha\colon r\colon \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x = y-1 \\ z = -y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow H = (0,1,0).$$
Per quanto detto prima $d(P,r) = \overline{PH} = \sqrt{2}$.

Il punto P' simmetrico di P rispetto a r è il simmetrico di P rispetto a H. Se $P' = (a, b, c)$, deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2} = 1 \\ \dfrac{c}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P' = (-1, 2, 0).$$

Infine, la retta s cercata ha parametri direttori (l, m, n) tali che:

$$\begin{cases} l + m - n = 0 \\ l + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = -l. \end{cases}$$

Prendendo, allora, $(1, -1, 0)$ come parametri direttori di s, abbiamo:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ -h & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = h^2 - 5$ e $|A| = 4 - h^2$, per $h = \pm 2$ abbiamo $|B| < 0$ e $|A| = 0$, per cui abbiamo due paraboloidi ellittici. Per $h = \pm\sqrt{5}$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui abbiamo due coni.
Sia $h \neq \pm 2, \pm\sqrt{5}$. Da:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -h & 0 \\ -h & 4-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 5T + 4 - h^2)$$

vediamo che gli autovalori di A sono $T = 1$ e le soluzioni dell'equazione $T^2 - 5T + 4 - h^2 = 0$. Quindi, gli autovalori di A saranno tutti dello stesso segno se saranno positivi e, per la regola dei segni di Cartesio applicata a $T^2 - 5T + 4 - h^2 = 0$, ciò avviene per $4 - h^2 > 0$, cioè $-2 < h < 2$. Ciò vuol dire che per $-2 < h < 2$ abbiamo degli ellissoidi. Essi saranno reali, in quanto per $-2 < h < 2$ abbiamo $|B| < 0$. Per $-\sqrt{5} < h < -2$ e $2 < h < \sqrt{5}$ abbiamo iperboloidi con $|B| < 0$, per cui sono iperboloidi ellittici. Per $h < -\sqrt{5}$ e $h > \sqrt{5}$ abbiamo iperboloidi con $|B| > 0$, per cui saranno degli iperboloidi iperbolici. Osserviamo, infine, che per $h \pm \sqrt{5}$ gli autovalori non sono dello stesso segno, per cui i due coni ottenuti sono reali.