Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr e Ps-Z) e Ingegneria Elettronica (J-Pr e Ps-Z)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 12 Febbraio 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (-1,-1,0) \\ f(1,1,1) &= (1,1,1) \\ f(0,1,0) &= (h,0,h) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Diagonalizzare $M(f)$ nei casi $h = 1$ e $h = -1$.
2. Posta $\mathcal{A} = [(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)]$, determinare la matrice $M^{\mathcal{A}}(f)$ e determinare una matrice associata all'applicazione inversa f^{-1} nei casi in cui f è invertibile.

Soluzione

1. È semplice vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} -h-1 & h & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -h & h & 1 \end{pmatrix}.$$
Sia $h = 1$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
e
$$P(T) = \begin{vmatrix} -2-T & 1 & 2 \\ -1 & -T & 2 \\ -1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2+2T+1) = (1-T)(T+1)^2.$$
Gli autovalori sono $1, -1$, con $m_1 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Sappiamo che $M(f)$ è diagonalizzabile se f è semplice, il che avviene se si ha contemporaneamente:
$$\begin{cases} \dim V_1 = m_1 = 1 \\ \dim V_{-1} = m_{-1} = 2. \end{cases}$$
Essendo $1 \leq \dim V_1 \leq 1 = m_1$ necessariamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$. Invece, abbiamo $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$. Sia, quindi, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker f_{-1}$ e che:
$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_{-1})) = 1$, per cui $\dim \ker f_{-1} = 3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Questo vuol dire che per $h = 1$ f è semplice e, perciò, per $h = 1$ $M(f)$ è diagonalizzabile. Determiniamo una base di autovettori. Dalla matrice $M(f_{-1})$ otteniamo:

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + 2z = 0\} = \{(y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{L}((1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

Inoltre, $V_1 = \ker f_1$, dove:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y + 2z = 0,\ -4x + 4z = 0\} = \mathcal{L}((1, 1, 1)).$$

Quindi, una base di autovettori per f è $[(1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 1, 1)]$. Inoltre, possiamo dire che $P^{-1}M(f)P = D$, cioè le matrici $M(f)$ e D sono simili, dove:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 & 2 \\ -1 & -T & 2 \\ 1 & -1 & 1 - T \end{vmatrix} = T^2(1 - T) - 1 + T = (1 - T)^2(1 + T).$$

Gli autovalori sono $1, -1$, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $M(f)$ è diagonalizzabile se f è semplice, il che avviene se si ha contemporaneamente:

$$\begin{cases} \dim V_1 = m_1 = 2 \\ \dim V_{-1} = m_{-1} = 1. \end{cases}$$

Essendo $1 \le \dim V_{-1} \le 1 = m_{-1}$ necessariamente si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Invece, abbiamo $1 \le \dim V_1 \le 2 = m_1$. Sia, quindi, $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \ker f_1$ e che:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$, per cui $\dim \ker f_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Questo vuol dire che per $h = -1$ f non è semplice e, perciò, per $h = -1$ $M(f)$ non è diagonalizzabile.

2. Dal momento che:

$$f(1, 1, 0) = (-1, -1, 0) = -1 \cdot (1, 1, 0) + 0\dot{(}1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 1, 0)$$

allora $[f(1, 1, 0)]_{\mathcal{A}} = (-1, 0, 0)$. Analogamente da:

$$f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = 0 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 1, 0)$$

segue che $[f(1, 1, 1)]_{\mathcal{A}} = (0, 1, 0)$. Dobbiamo calcolare $[(h, 0, h)]_{\mathcal{A}}$:

$$(h, 0, h) = a(1, 1, 0) + b(1, 1, 1) + c(0, 1, 0) = (a + b, a + b + c, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=h \\ a+b+c=0 \\ b=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0b=h \\ c=-h. \end{cases}$$

Quindi, $[f(0,1,0)]_{\mathcal{A}} = [(h,0,h)]_{\mathcal{A}} = (0,h,-h)$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M^{\mathcal{A}}(f)| = h$ e f è invertibile per $h \neq 0$. Quindi, per $h \neq 0$ esiste l'applicazione inversa f^{-1} e:

$$M^{\mathcal{A}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati la retta
$$r\colon \begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \end{cases}$$
e il piano $\pi\colon y-3=0$. Determinare la retta s proiezione ortogonale di r sul piano π e calcolare la distanza $d(r,s)$.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$hx^2 - 2hxy - y^2 + 4 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare l'iperbole del fascio avente asintoto parallelo alla retta di equazione $x+y=0$.

Soluzione

1. Osserviamo che la retta r ha parametri direttori $(1,0,-1)$, per cui $(1,0,-1)$ sono le componenti di un vettore parallelo alla retta r, e che $(0,1,0)$ sono le componenti di un vettore ortogonale al piano π. I due vettori sono ortogonali tra loro, per cui retta e piano sono paralleli. Questo implica che la retta s che cerchiamo sarà anch'essa parallela a r.

   Prendiamo, ora, un qualsiasi punto di r, per esempio $P = (0,1,0)$. La retta p passante per P e ortogonale a π ha equazioni:
$$p\colon \begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow p\colon \begin{cases} x=0 \\ z=0. \end{cases}$$
   Determiniamo il punto $H = p \cap \pi$:
$$H\colon \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Rightarrow H = (0,3,0).$$
   Il punto $P' = (a,b,c)$ simmetrico di $P = (0,1,0)$ rispetto a π è il simmetrico di P rispetto a $H = (0,3,0)$, per cui deve essere:
$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}) = 0 \\ \dfrac{b+1}{2} = 3 \\ \dfrac{c}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=5 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow P' = (0,5,0).$$

Quindi, la retta s cercata ha parametri direttori $(1,0,-1)$ e passa per $P' = (0,5,0)$:

$$s\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 5 \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x+z = 1 \\ y = 5. \end{cases}$$

2. La conica nascosta del fascio ha equazione:

$$x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x(x-2y) = 0,$$

che è spezzata. Le matrici associate al fascio sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & -h & 0 \\ -h & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & -h \\ -h & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = 4(-h^2 - h)$ e $|A| = -h^2 - h$. Quindi, per $h = 0$ e $h = -1$ abbiamo le coniche spezzate di equazioni, rispettivamente:

$$-y^2 + 4 = 0 \Rightarrow (y+2)(y-2) = 0$$

e

$$-x^2 + 2xy - y^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-y+2)(x-y-2) = 0.$$

I punti base sono i punti per cui passano tutte le coniche del fascio:

$$\begin{cases} (y-2)(y+2) = 0 \\ x(x-2y) = 0, \end{cases}$$

per cui essi hanno coordinate $(0,2)$, $(0,-2)$, $(4,2)$ e $(-4,-2)$. Inoltre, $|A| > 0$ per $-1 < h < 0$ e in tal caso abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali. Non ci sono parabole, poiché per $h = 0$ e $h = -1$ abbiamo delle coniche spezzate. Per $h < -1$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = 1$.

Infine, l'iperbole avente l'asintoto parallelo alla retta di equazione $x + y = 0$ ha punto improprio di coordinate $(1,-1,0)$. Quindi, dobbiamo determinare l'iperbole passante per il punto improprio $(1,-1,0)$. Sostituendo nell'equazione del fascio abbiamo:

$$h + 2h - 1 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{3}.$$

Quindi, l'iperbole richiesta ha equazione:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}xy - y^2 + 4 = 0.$$