Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 11 Marzo 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, hx+y+z, x+hy+hz, 2x+4y+(-h-2)z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Sono dati $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$ e $U = \mathcal{L}((1,1,1,2),(-1,2,2,-2))$. Determinare le equazioni cartesiane di U, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione, e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) = U$.

2. È assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Studiare la semplicità di $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, ove possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. Ricaviamo le equazioni cartesiane di U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & z-y & t-2x \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y-z=0,\, 2x-t=0\}.$$

Osserviamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 4 & -h-2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, essendo $V = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,-1))$, abbiamo $f(V) = \mathcal{L}(f(1,0,1), f(0,1,-1))$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 4 & -h-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h+1 \\ h+1 \\ -h \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 4 & -h-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ h+6 \end{pmatrix}$$

vediamo che $f(1,0,1) = (0, h+1, h+1, -h)$ e $f(0,1,-1) = (3,0,0,h+6)$. Dunque:

$$f(V) = \mathcal{L}((0,h+1,h+1,-h),(3,0,0,h+6)).$$

Chiaramente la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & h+6 \\ 0 & h+1 & h+1 & -h \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 2 per ogni $h \in \mathbb{R}$, per cui per ogni $h \in \mathbb{R}$ possiamo dire che $\dim f(V) = 2$. Quindi, sappiamo che $\dim f(V) = 2 = \dim U$ per ogni valore di h e, di conseguenza, per determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) = U$ basta determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale i due generatori di $f(V)$ $(0,h+1,h+1,-h),(3,0,0,h+6) \in U$, cioè il valore di h per il quale entrambi i generatori di $f(V)$ verificano l'equazione cartesiana di U. È immediato vedere che

$$(3,0,0,h+6) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 6-h-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow h = 0$$

e

$$(0,h+1,h+1,-h) \in U \begin{cases} h+1 = h+1 \\ 2h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow h = 0.$$

Di conseguenza il valore per cui $f(V) = U$ è $h = 0$.

2. Sappiamo che:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 4 & -h-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & h-T & h \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)[(h-T)^2-1] = (h-T)(h+1-T)(h-1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono $h, h+1, h-1$, tutti distinti tra loro per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$, per cui avranno tutti sempre molteplicità algebrica 1. Ciò vuol dire che φ è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$ ed è sempre, perciò, possibile determinare una base di autovettori per φ.

Sia $T = h$. Sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} \varphi_h$, dove $\varphi_h = \varphi - hi$ e:

$$M(\varphi_h) = M(\varphi) - hI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\ x+hz=0\} = \mathcal{L}((-h,-1,1)).$$

Sia $T = h+1$. Sappiamo che $V_{h+1} = \operatorname{Ker} \varphi_{h+1}$, dove $\varphi_{h+1} = \varphi - (h+1)i$ e:

$$M(\varphi_{h+1}) = M(\varphi) - (h+1)I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & h \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando } R_2 \text{ e } R_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui:
$$V_{h+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0,\ -z=0\} = \mathcal{L}((1,1,0)).$$
Sia $T = h-1$. Sappiamo che $V_{h-1} = \operatorname{Ker} \varphi_{h-1}$, dove $\varphi_{h-1} = \varphi - (h-1)i$ e:
$$M(\varphi_{h-1}) = M(\varphi) - (h-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando } R_2 \text{ e } R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
per cui:
$$V_{h-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ z=0\} = \mathcal{L}((1,-1,0)).$$
Quindi, una base di autovettori per φ è $[(-h,-1,1),(1,-1,0),(1,1,0)]$.

II

È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$.

1. Sono dati il piano $\pi\colon\ x+y+z=0$ e la retta
$$r\colon \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z-1=0. \end{cases}$$
Determinare la retta s proiezione ortogonale di r su π, mostrare che r e π sono paralleli e il piano contenente r e parallelo a π.

2. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$2x^2 - 2xy + y^2 + hz^2 + 2hz - 1 = 0.$$
Per il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale si ottiene un cono, determinarne il vertice.

Soluzione

1. Il vettore di componenti $(1,1,1)$ è ortogonale al piano π. Per determinare la retta s occorre determinare il piano π' contenente r e ortogonale a π. I piani contenenti r hanno equazione:
$$\lambda(x-y) + \mu(2x+z-1) = 0 \Rightarrow (\lambda+2\mu)x - \lambda y + \mu z - \mu = 0.$$
Vogliamo che i vettori di componenti $(1,1,1)$ e $(\lambda+2\mu, -\lambda, \mu)$ siano ortogonali tra loro, cioè deve accadere:
$$\lambda + 2\mu - \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$
Quindi, $\pi'\colon\ x-y=0$ e:
$$s = \pi \cap \pi'\colon \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$$
Osserviamo facilmente che la retta r ha parametri direttori $(1,1,-2)$. Essendo i vettori di componenti $(1,1,-2)$ e $(1,1,1)$ ovviamente ortogonali tra loro, si ha che la retta r e il piano π sono paralleli.
Infine, come prima i piani contenenti r hanno equazione:
$$(\lambda+2\mu)x - \lambda y + \mu z - \mu = 0.$$
Vogliamo che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda+2\mu & -\lambda & \mu \end{pmatrix}$$
abbia rango 1. Dunque, riducendo abbiamo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda+2\mu & -\lambda & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\lambda+2\mu & 0 & \lambda+\mu. \end{pmatrix}$$
L'unica possibilità è che sia $\lambda + \mu = 0$, cioè prendendo $\lambda = -1$ e $\mu = 1$ troviamo l'equazione del piano contenente r e parallelo a π:
$$x+y+z-1=0.$$

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & h \\ 0 & 0 & h & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = -h^2 - h$ e $|A| = h$. Quindi, per $h = -1$ abbiamo certamente un cono, il cui vertice V è dato da:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + y = 0 \Rightarrow V = (0, 0, -1). \\ -z - 1 = 0 \end{cases}$$

Per $h = 0$ abbiamo $|B| = 0$, $|A| = 0$ e $\rho(B) = 3$: in tal caso abbiamo un cilindro. Per $h \neq 0, -1$ abbiamo iperboloidi o ellissoidi. Essendo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & 0 \\ -1 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T^2 - 3T + 1),$$

vediamo che gli autovalori sono concordi per $h > 0$ e discordi per $h < 0$. Quindi, per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi e per $h < 0$, $h \neq -1$, abbiamo degli iperboloidi. Essendo, poi, $|B| = -h^2 - h$, concludiamo che per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi reali, per $-1 < h < 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h < -1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.