Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 10 Settembre 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned}&(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f\\&(1,1,0) \text{ è autovettore associato all'autovalore } 2\\&f(1,0,1) = (h,0,-h).\end{aligned}$$

Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. Date le basi $\mathcal{A} = [(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)]$ e $\mathcal{B} = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$, rispettivamente, di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, si studi al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & h & -1 \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$. Stabilire, poi, se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali si ha $\operatorname{Im} g \oplus \mathcal{L}((0,0,1,1)) = \mathbb{R}^4$.

Soluzione

1. Calcoliamo $[(h,0,-h)]_{\mathcal{A}}$, essendo $\mathcal{A} = [(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)]$:

$$(h,0,-h) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,1) = (a+b+c, a+b, a+c) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = h \\ a+b = 0 \\ a+c = -h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2h \\ b = 2h \\ c = h \end{cases} \Rightarrow [(h,0,-h)]_{\mathcal{A}} = (-2h, 2h, h).$$

Dunque:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2h \\ 0 & 2 & 2h \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 2h \\ 0 & 2-T & 2h \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = -T(2-T)(h-T).$$

Questo vuol dire che autovalori sono $0, 2, h$, per cui per $h \neq 0, 2$ f è certamente semplice. Determiniamo in tal caso una base di autovettori. Essendo, per $h \neq 0, 2$, i tre autovalori di molteplicità algebrica 1, sappiamo che tutti gli autospazi hanno molteplicità algebrica 1. Inoltre, per l'assegnazione di f, sappiamo che $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f = V_0$, il che implica che $V_0 = \mathcal{L}((1,1,1))$ e che $(1,1,0) \in V_2$, il che implica che $V_2 = \mathcal{L}((1,1,0))$. Dobbiamo, perciò, solo determinare V_h. Sia, allora, $T = h$. Sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, essendo $f_h = f - hi$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_h) = M^{\mathcal{A}}(f) - hI = \begin{pmatrix} -h & 0 & -2h \\ 0 & 2-h & 2h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_h = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c), -ha - 2hc = 0,\ (2-h)b + 2hc = 0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (-2c, \tfrac{2h}{h-2}c, c)\} = \mathcal{L}((-2h+4, 2h, h-2)_{\mathcal{A}}) = \\ = \mathcal{L}((-2h+4)(1,1,1) + 2h(1,1,0) + (h-2)(1,0,1)) = \mathcal{L}((h+2, 4, -h+2)). \end{aligned}$$

Quindi, per $h \neq 0, 2$ una base di autovettori è $[(1,1,1), (1,1,0), (h+2, 4, -h+2)]$.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Dovendo essere $\dim V_2 = 1$ necessariamente, f è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso, è evidente che $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2$ e che:

$$V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathcal{L}((1,1,1), (1,0,1)).$$

Inoltre, come abbiamo visto in precedenza deve essere $\dim V_2 = \mathcal{L}((1,1,0))$. Dunque, per $h = 0$ una base di autovettori è $[(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)]$, cioè, essendo $M^{\mathcal{A}}(f)$ diagonale, $\mathcal{A}$ è una base di autovettori. Osserviamo che potevamo rapidamente giungere alla stessa conclusione notando che, in questo caso, la matrice $M^{\mathcal{A}}(f)$ è diagonale: questo vuol dire che l'endomorfismo f è semplice e che la base $\mathcal{A}$ è una base di autovettori.

Sia $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 1$ e $m_2 = 2$. Essendo necessariamente $\dim V_0 = 1 = m_0$, f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(f_2) = M^{\mathcal{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_2 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_2$, per cui per $h = 2$ f non è semplice e non è, perciò, possibile determinare una base di autovettori per f.

2. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & h & -1 \end{vmatrix} = h + 1$$

vediamo che per $h \neq -1$ si ha che $\rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)) = 3$. Dunque, $\dim \operatorname{Im} g = 3$ e una sua base è data da:

$$[(1,-1,2,h)_{\mathcal{B}}, (1,0,h,1)_{\mathcal{B}}, (-2,1,-1,0)_{\mathcal{B}}] = [(1,0,1,h), (1,1,h,1), (-2,-1,0,0)].$$

Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 3 = 0$, per cui $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[(1,-1,2,-1)_{\mathcal{B}}, (1,0,-1,1)_{\mathcal{B}}] = [(1,0,1,-1), (1,1,-1,1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} g = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a+b-2c=0,\ -a+c=0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (c,c,c)\} = \mathcal{L}((1,1,1)_{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}((3,2,2)).\end{aligned}$$

Osserviamo che per la formula di Grassmann, se $\operatorname{Im} f \oplus \mathcal{L}((0,0,1,1)) = \mathbb{R}^4$, allora deve essere $\dim \operatorname{Im} g = 3$, il che avviene $h \neq -1$. Sia, dunque, $h \neq -1$. Tuttavia, essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & h \\ 1 & 1 & h & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

possiamo dire che l'uguaglianza $\operatorname{Im} g \oplus \mathcal{L}((0,0,1,1)) = \mathbb{R}^4$ non è valida per alcun valore di h.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati i punti $P = (1,-1,2)$, $P_\infty = (0,1,3,0)$, il piano $\pi\colon x+z=0$ e la retta $r\colon x+1 = y-1 = 0$, determinare:
   (a) le equazioni della retta PP_∞;
   (b) la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π;
   (c) il piano α ortogonale a π, parallelo alla retta PP_∞ e passante per l'origine O.
2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette di equazioni $x+y+1=0$ e $x-y-1=0$ nei punti in cui esse incontrano la retta di equazione $x+2y=0$. Determinare gli asintoti della conica del fascio passante per il punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

Soluzione

1. La retta PP_∞ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+t \\ z = 2+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z-2 = 3(y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

I piani contenenti la retta r hanno equazione:

$$\lambda(x+1) + \mu(y-1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y + \lambda - \mu = 0.$$

Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda, \mu, 0)$ e $(1,0,1)$ siano ortogonali tra loro, cioè deve essere:

$$\lambda = 0.$$

Quindi, il piano contenente r e ortogonale al piano π ha equazione $y-1=0$, per cui:

$$r'\colon \begin{cases} y-1=0 \\ x+z=0. \end{cases}$$

Infine, il piano α cercato è ortogonale al vettore di componenti (a,b,c) a sua volta ortogonale ai vettori di componenti $(1,0,1)$ e $(0,1,3)$. Dunque, deve essere:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+3c=0, \end{cases}$$

per cui possiamo dire che $(1,3,-1)$ è un vettore ortogonale al piano α, per cui $\alpha\colon x+3y-z=0$.

2. Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$h(x+y+1)(x-y-1)+(x+2y)^2=0 \Rightarrow (h+1)x^2+4xy+(-h+4)y^2-2hy-h=0,$$

in quanto le uniche coniche spezzate del fascio sono quelle di equazioni $(x+y+1)(x-y-1)=0$ e $(x+2y)^2=0$. Dunque, per $h \neq 0$, le coniche del fascio sono certamente irriducibili, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & 2 \\ 2 & -h+4 \end{vmatrix} = -h^2+3h$$

segue che per $0 < h < 3$ abbiamo delle ellissi (reali, poiché i punti base sono reali), nessuna delle quali è una circonferenza; per $h=-3$ abbiamo una parabola, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata; per $h<0$ e $h>3$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Osserviamo che il punto improprio dell'asse $\vec{y}$ è $(0,1,0)$. Imponiamo il passaggio al fascio di coniche:

$$(h+1)x^2+4xy+(-h+4)y^2-2hyt-ht^2=0 \Rightarrow -h+4=0 \Rightarrow h=4.$$

Quindi, la conica cercata ha equazione:

$$5x^2+4xy-8y-4=0,$$

la quale, per la classificazione fatta in precedenza, è un'iperbole. Cerchiamone il centro di simmetria. Essendo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix},$$

da:

$$\begin{cases} 5x+2y=0 \\ 2x-4=0 \end{cases}$$

vediamo che il centro di simmetria è il punto $C=(2,-5)$. Per determinare gli asintoti cerchiamo i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} 5x^2+4xy-8yt-4t^2=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(5x+4y)=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Quindi, i punti impropri sono $(0,1,0)$ (come già sapevamo) e $(4,-5,0)$. Gli asintoti, sono allora le rette di equazione $x=2$ e:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-5} \Rightarrow 5x+4y+10=0.$$