Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 Gennaio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri la generica applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$f(1,0,1,-1) = (1,-1,0)$$
$$f(-1,1,0,1) = (-1,0,1)$$
$$f(0,1,1,1) = (1,1,1).$$

1. Determinare una matrice associata a f.
2. Studiare la generica applicazione lineare f, determinando, in particolare, nucleo e immagine.
3. Fra le applicazioni lineari f determinare l'applicazione lineare g tale che $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}((1,1,1,1))$.
4. Posti $v_1 = (1,-1,1,-2)$, $v_2 = (1,0,0,1)$ e $v_3 = (0,1,1,0)$ e $V = \mathscr{L}(v_1,v_2,v_3)$, studiare l'applicazione lineare $g'\colon V \to \mathbb{R}^3$ restrizione di g a V.
5. Diagonalizzare la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g')$, dove $\mathscr{A} = [v_1,v_2,v_3]$.

Soluzione

1. Si vede facilmente che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
ha rango 4, per cui $\mathscr{B} = [(1,0,1,-1),(-1,1,0,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Di conseguenza, una matrice associata a f è:
$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

2. Calcolando il seguente minore di ordine 3 di $M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f)$:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$
vediamo che $\rho(M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f)) = 3$, per cui f è sempre suriettiva e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e da:
$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & a+b+c \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker} f = \\
&= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 = 0,\ -x_1 + x_3 + bx_4 = 0,\ 3x_3 + (a+b+c)x_4 = 0\} = \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid [v]_{\mathscr{B}} = \left(\frac{-a+2b-c}{3}x_4, \frac{a+b-2c}{3}x_4, \frac{-a-b-c}{3}x_4, x_4\right)\right\} = \\
&= \mathscr{L}((-a+2b-c)(1,0,1,-1) + (a+b-2c)(-1,1,0,1) + (-a-b-c)(0,1,1,1) + 3(1,1,1,1)) = \\
&= \mathscr{L}((-2a+b+c+3, -3c+3, -2a+b-2c+3, a-4b-2c+3)).
\end{aligned}$$

3. Dire che $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}((1,1,1,1))$ implica che $f(1,1,1,1) = (0,0,0)$. Questo vuol dire che l'applicazione lineare g è quella tale che:
$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Cominciamo cercando la matrice $M(g)$ associata a g rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$. Dalle assegnazioni date abbiamo:
$$\begin{cases} g(e_1) + g(e_3) - g(e_4) = (1,-1,0) \\ -g(e_1) + g(e_2) + g(e_4) = (-1,0,1) \\ g(e_2) + g(e_3) + g(e_4) = (1,1,1) \\ g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) + g(e_4) = (0,0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(e_1) = (-1,-1,-1) \\ g(e_2) = (-3,-3,0) \\ g(e_3) = (3,2,1) \\ g(e_4) = (1,2,0). \end{cases}$$
Dunque:
$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, si vede facilmente che i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti e che:
$$\begin{aligned} g(v_1) &= (3,0,0) \\ g(v_2) &= (0,1,-1) \\ g(v_3) &= (0,-1,1), \end{aligned}$$
da cui:
$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g') = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ne deduciamo che $\dim \operatorname{Im} g' = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g')) = 2$ e una sua base è $[(1,0,0),(0,1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g' = 3 - 2 = 1$ e, essendo g' restrizione di g e $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}((1,1,1,1))$, deve essere necessariamente $\operatorname{Ker} g' = \mathscr{L}((1,1,1,1))$.

5. Per diagonalizzare la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g')$ occorre considerare l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che la sua matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:
$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcoliamone il polinomio caratteristico:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & -1 \\ 0 & -1 & 1-T \end{vmatrix} = (3-T)(T^2 - 2T).$$

Quindi, gli autovalori sono 3, 2 e 0, tutti distinti a due a due e di molteplicità algebrica 1. Ciò significa che φ è semplice e che la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g')$ è diagonalizzabile. Per diagonalizzarla occorre calcolare gli autospazi.

Si vede facilmente che $V_3 = \mathscr{L}((1,0,0))$, $V_2 = \mathscr{L}((0,1,-1))$ e $V_0 = \mathscr{L}((0,1,1))$. Dunque, possiamo dire che $P^{-1} \cdot M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g') \cdot P = P^{-1} \cdot M(\varphi) \cdot P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnate le rette:
$$r\colon \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
ed i piani $\alpha\colon y + z + 1 = 0$ e $\beta\colon x + 3y + z = 0$. Determinare le equazioni della retta t incidente le rette r e s e parallela ai piani α e β. Dati i punti $A = r \cap t$ e $B = s \cap t$, determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e l'equazione del piano parallelo a β e passante per M.

2. Sono assegnati i punti $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,0)$ e $B = (-2,0,0)$ e la retta $s\colon x + y = z = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per O, A e B e tangenti in O alla retta s.

3. Data la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 2y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$
determinare e studiare la quadrica contenente Γ, le rette:
$$t_1\colon \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad t_2\colon \begin{cases} x - 7y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
e il punto $P = (0,0,-2)$.

Soluzione

1. I generici punti di r e s sono, rispettivamente, $A = (a-1, a, a)$ e $B = (b, -b, 0)$. La retta t è una retta del tipo AB per qualche A e B. La retta AB ha parametri direttori $(a - b - 1, a + b, a)$. Perché la retta t sia parallela ai piani dati deve essere:
$$\begin{cases} (a+b) + a = 0 \\ (a - b - 1) + 3(a+b) + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$$
Dunque, la retta t è la retta passante per i punti $A = (0,1,1)$ e $B = (-2,2,0)$, per cui:
$$t\colon -\frac{x}{2} = y - 1 = -(z-1) \Rightarrow t\colon \begin{cases} x - 2z + 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$
Si vede che $M = (-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e che il piano cercato ha equazione del tipo:
$$x + 3y + z + d = 0.$$
Imponendo il passaggio per M otteniamo $d = -4$, per cui il piano ha equazione $x + 3y + z - 4 = 0$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono $s \cup AB$: $(x+y)(x-3y+2)=0$ e $OA \cup OB$: $y(x-y)=0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:
$$hy(x-y)+(x+y)(x-3y+2)=0 \Rightarrow x^2+(h-2)xy-(h+3)y^2+2x+2y=0.$$
Sappiamo che le due coniche utilizzate per scrivere l'equazione del fascio sono le uniche spezzate, per cui possiamo dire che per $h=0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h \neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h-2}{2} \\ \frac{h-2}{2} & -h-3 \end{vmatrix} = -\frac{h^2+16}{4}$$
vediamo che le coniche per $h \neq 0$ sono tutte delle iperboli. In particolare, dato che $\operatorname{Tr}(A) = -2-h$, per $h=-2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Osserviamo che:
$$t_1\colon \begin{cases} x=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$
e che le rette t_1 e t_2 sono entrambe contenute nello stesso piano. Dunque, possiamo dire che la quadrica cercata deve contenere anche la conica:
$$\Gamma' = t_1 \cup t_2\colon \begin{cases} x(x-7y)=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$$
La generica quadrica contenente la conica Γ ha equazione:
$$x^2-6xy+y^2+2x+2y+z(ax+by+cz+d)=0.$$
Intersechiamola con il piano contenente la conica Γ':
$$\begin{cases} x^2-6xy+y^2+2x+2y+z(ax+by+cz+d)=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (a+c+1)x^2+(b+c+1)y^2+(a+b+2c-6)xy+(d+2)x+(d+2)y=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$$
Tale conica coincide con Γ' se esiste $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, tale che:
$$(a+c+1)x^2+(b+c+1)y^2+(a+b+2c-6)xy+(d+2)x+(d+2)y = \rho x(x-7y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+c+1=\rho \\ b+c+1=0 \\ a+b+2c-6=-7\rho \\ d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho=1 \\ a=-c \\ b=-c-1 \\ d=-2. \end{cases}$$
Dunque, la quadrica cercata è tra quelle di equazione:
$$x^2-6xy+y^2+2x+2y+z[-cx+(-c-1)y+cz-2]=0.$$
Imponendo il passaggio per il punto P abbiamo $c=-1$, per cui la quadrica ha equazione:
$$x^2-6xy+y^2+2x+2y+z(x-z-2)=0 \Rightarrow x^2-6xy+y^2+xz-z^2+2x+2y-2z=0.$$
Dato che:
$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{49}{4} > 0 \quad \text{e} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{31}{4} \neq 0$$
e che la quadrica è necessariamente reale, concludiamo che essa è un iperboloide iperbolico.