Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 30 Giugno 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 4

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ e $v_3 = (1,1,2,0) \in \mathbb{R}^4$, lo spazio vettoriale V avente $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ come base e l'endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ h & h & 1 \\ -h & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali 2 è autovalore per f. Per tali valori di h studiare la semplicità di f, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
2. Dato $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z - t = 0,\ y = 0\}$ determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f|_U$ induce un endomorfismo $\varphi\colon U \to U$. Studiare la semplicità di φ determinando, se possibile, una base di autovettori per φ.

Soluzione

1. Vogliamo che:
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ h & h-2 & 1 \\ -h & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2h^2 - 2h = 0,$$
per cui 2 è autovalore per $h = 0$ e $h = 1$.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 2 & 2 \\ 0 & -T & 1 \\ 0 & -1 & -1-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2+T+1),$$
per cui l'unico autovalore è 1 con molteplicità algebrica 1. Ciò vuol dire che f certamente non è semplice.

   Sia $h = 1$. In tal caso:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 2 & 2 \\ 1 & 1-T & 1 \\ -1 & -1 & -1-T \end{vmatrix} = T^2(2-T),$$
per cui gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che deve necessariamente essere $\dim V_2 = 1 = m_2$, mentre $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$, per cui in tal caso f è semplice se $\dim V_0 = 2 = m_0$.

   Sia $T = 0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_0 = 2 = m_0$ e f è semplice e si ha:

$$V_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a+b+c=0\} = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3) = \\ = \mathscr{L}\left((0,-1,-2,1),(-1,0,-1,0)\right).$$

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2b+2c=0,\ a+2c=0\} = \mathscr{L}(-2v_1 - v_2 + v_3) = \\ = \mathscr{L}\left((-1,0,1,-2)\right).$$

Quindi, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(0,-1,-2,1),(-1,0,1-,0),(-1,0,1,-2)]$.

2. Si vede facilmente che:

$$U = \{(z+t,0,z,t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}\left((1,0,1,0),(1,0,0,1)\right),$$

per cui:

$$f(U) = \mathscr{L}\left(f(1,0,1,0), f(1,0,0,1)\right).$$

Calcoliamo $[(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}}$:

$$(1,0,1,0) = a(1,0,0,1) + b(0,1,1,0) + c(1,1,2,0) = (a+c, b+c, b+2c, a) \Rightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+c=0 \\ b+2c=1 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow [(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (0,-1,1).$$

Dato che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ h & h & 1 \\ -h & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h+1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo che $f(1,0,1,0) = (1-h)(0,1,1,0) = (0,1-h,1-h,0)$. Chiaramente abbiamo anche che:

$$f(1,0,0,1) = 2(1,0,0,1) + h(0,1,1,0) - h(1,1,2,0) = (2-h,0,-h,2),$$

per cui:

$$f(U) = \mathscr{L}((0,1-h,1-h,0),(2-h,0,-h,2)) \subseteq U \Leftrightarrow (0,1-h,1-h,0),(2-h,0,-h,2) \in U$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h-1=0 \\ 1-h=0 \\ 2-h+h-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow h=1.$$

Dunque, la restrizione $f|_U$ induce un endomorfismo $\varphi\colon U \to U$ per $h = 1$. In tal caso, abbiamo:

$$\varphi(1,0,1,0) = (0,0,0,0)$$
$$\varphi(1,0,0,1) = (1,0,-1,2).$$

Si vede facilmente che $(1,0,-1,2) = -(1,0,1,0) + 2(1,0,0,1)$. Quindi, se $\mathscr{B} = [(1,0,1,0),(1,0,0,1)]$ è la base di U che stiamo considerando, abbiamo:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

, per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 \\ 0 & 2-T \end{vmatrix} = -T(2-T).$$

Quindi, gli autovalori per φ sono 0 e 2, con $m_0 = m_2 = 1$, e possiamo concludere subito che φ è semplice. Chiaramente, si ha $V_0 = \operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{L}((1,0,1,0))$, mentre da:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi_2) = M^{\mathscr{B}}(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_2 = \{u \in U \mid [u]_{\mathscr{B}} = (a, -2a)\} = \mathscr{L}((1,0,1,0) - 2(1,0,0,1)) = \mathscr{L}((-1,0,1,-2)).$$

Ciò vuol dire che una base di autovettori per φ è $[(1,0,1,0),(-1,0,1,-2)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati:
$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$
e il punto $P = (1,0,0)$, determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$. determinare la proiezione ortogonale di r sul piano π.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 - 2hxy + 2hy^2 - 6x + 9 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare e classificare la conica del fascio passante per il punto $P_\infty = (2,1,0,0)$.

Soluzione

1. Si vede facilmente che r ha parametri direttori $(0,1,1)$. Le rette passanti per P hanno equazioni:
$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = mt \\ z = nt \end{cases}$$
e formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$ se:
$$\frac{|m+n|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |m+n| = \sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$
Elevando al quadrato otteniamo $l^2 = 2mn$ e ricavando l, m, n dalle equazioni della generica retta per P otteniamo:
$$\begin{cases} l = \dfrac{x-1}{t} \\ m = \dfrac{y}{t} \\ n = \dfrac{z}{t}. \end{cases}$$
Sostituendo in $l^2 = 2mn$, abbiamo:
$$\frac{(x-1)^2}{t^2} = 2\frac{y}{t}\frac{z}{t} \Rightarrow (x-1)^2 = 2yz,$$
che è l'equazione del luogo cercato.

2. La conica nascosta ha equazione $y(x-y)=0$, per cui essa è una conica spezzata in due rette reali e distinte.

   Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & -3 \\ -h & 2h & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -h & 2h \end{pmatrix}.$$

   Dato che $|B| = -9h^2$, concludiamo che per $h \neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo la conica spezzata di equazione:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0.$$

   I punti base del fascio sono:

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ y(x-y) = 0, \end{cases}$$

   cioè sono i punti $(3,0)$ e $(3,3)$, ciascuno contato due volte. Dato che $|A| = 2h - h^2$, per $0 < h < 2$ abbiamo delle ellissi reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 2$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $h < 0$ e $h > 2$ abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ha per $h = -\frac{1}{2}$.

   Determiniamo la conica passante per $P_\infty = (2,1,0)$, scrivendo l'equazione del fascio in coordinate omogenee:

$$x^2 - 2hxy + 2hy^2 - 6xt + 9t^2 = 0 \Rightarrow 4 - 4h + 2h = 0 \Rightarrow h = 2.$$

   Ciò vuol dire che la conica cercata è la parabola del fascio.