Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 30 Giugno 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito 3

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,1)$ e $v_3 = (1,0,2,1) \in \mathbb{R}^4$, lo spazio vettoriale $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -hv_2 - hv_3 \\ f(v_2) &= -v_1 - v_3 \\ f(v_3) &= v_1 + hv_2 + (h+1)v_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.
2. Mostrare che $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0,\ y = 0\}$ è un sottospazio di V e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(U) \subseteq U$, specificando se vale l'uguaglianza tra i due spazi.

Soluzione

1. È facile vedere che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ -h & -1 & h+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 & 1 \\ -h & -T & h \\ -h & -1 & h+1-T \end{vmatrix} = -T[T^2 - (h+1)T + h].$$

Quindi, gli autovalori sono $T = 0$, $T = 1$ e $T = h$ ed essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 1$. Dunque, per $h \neq 0, 1$ f è certamente semplice ed ammette una base di autovettori.

Sia $T = 0$. In tal caso, sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ -h & -1 & h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_0 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -b+c = 0,\ -ha+hc = 0\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}((2,0,3,3)).$$

Sia $T = 1$. In tal caso, sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -h & -1 & h \\ -h & -1 & h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -h+1 & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a-b+c = 0,\ (1-h)a + (h-1)c = 0\} = \mathscr{L}(v_1 + v_3) = \mathscr{L}((2,0,2,2)).$$

Sia $T = h$. In tal caso, sappiamo che $V_h = \operatorname{Ker} f_h$, dove $f_h = f - hi$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_h) = M^{\mathscr{A}}(f) - hI = \begin{pmatrix} -h & -1 & 1 \\ -h & -h & h \\ -h & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -h & -1 & 1 \\ 0 & 1-h & h-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_h = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -ha - b + c = 0,\ (1-h)b + (h-1)c = 0\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3) = \mathscr{L}((1,0,3,2)).$$

Quindi, per $h \neq 0, 1$ una base di autovettori è $[(2,0,3,3),(2,0,2,2),(1,0,3,2)]$. Dato che il parametro h non figura, questa è una base di autovettori anche per $h = 0, 1$, nei quali casi perciò f è semplice, ed è la base di autovettori indipendente dal parametro richiesta.

2. Sappiamo che:

$$U = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,0,1,0)) \Rightarrow f(U) = \mathscr{L}(f(1,0,0,1), f(0,0,1,0)).$$

Sappiamo già che:

$$f(1,0,0,1) = f(v_1) = -hv_2 - hv_3 = (-h, 0, -3h, -2h).$$

Calcoliamo $[(0,0,1,0)]_{\mathscr{A}}$:

$$(0,0,1,0) = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a+c, 0, b+2c, a+b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + 2c = 1 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow [(0,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}).$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -h & 0 & h \\ -h & -1 & h+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ h \\ h + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$[f(0,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (0,0,1,0) \Rightarrow f(0,0,1,0) = \frac{1}{2}v_1 + hv_2 + \left(h + \frac{1}{2}\right)v_3 = (h+1, 0, 3h+1, 2h+1).$$

Dunque:

$$f(U) = \mathscr{L}((-h,0,-3h,-2h),(h+1,0,3h+1,2h+1)) \subseteq U \Leftrightarrow (-h,0,-3h,-2h),(h+1,0,3h+1,2h+1) \in U$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -h = -2h \\ h + 1 = 2h + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \{h = 0.$$

Dunque, per $h = 0$ si ha $f(U) \subseteq U$. Ma osserviamo subito che per $h = 0$ si ha $\dim f(U) = 1$, mentre $\dim U = 2$. Ciò vuol dire che $f(U)$ è un sottospazio proprio di U.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati:

$$r\colon \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ e } \pi\colon x - y - z = 0,$$

determinare la proiezione ortogonale di r sul piano π.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 0)$ e O ed ivi tangenti alla retta $x + 2y = z = 0$.

Soluzione

1. Dobbiamo determinare il piano α contenente r e ortogonale a π. I piani contenenti α hanno equazione:

$$\lambda(2x + y + z - 1) + \mu(x + y + 2z + 2) = 0 \Rightarrow (2\lambda + \mu)x + (\lambda + \mu)y + (\lambda + 2\mu)z - \lambda + 2\mu = 0.$$

Vogliamo che i vettori di componenti $(2\lambda + \mu, \lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$ e $(1, -1, -1)$ siano ortogonali:

$$2\lambda + \mu - \lambda - \mu - \lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Dunque, $\alpha\colon 2x + y + z - 1 = 0$ e la proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $(x + 2y)(y - 1) = 0$ e $(x - y)(x - 2y) = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x + 2y)(y - 1) + (x - y)(x - 2y) = 0 \Rightarrow x^2 + (h - 3)xy + (2h + 2)y^2 - hx - 2hy = 0.$$

Sappiamo che per costruzione le uniche coniche spezzate del fascio sono quelle usate per scriverne l'equazione. Ciò vuol dire che per $h \neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata. Dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-3}{2} \\ \dfrac{h-3}{2} & 2h+2 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 14h - 1}{4},$$

vediamo che per $7 - 4\sqrt{3} < h < 7 + 4\sqrt{3}$ abbiamo delle ellissi reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 7 \pm 4\sqrt{3}$ abbiamo delle parabole; per $h < 7 - 4\sqrt{3}$, $h \neq 0$, e $h > 7 + 4\sqrt{3}$ abbiamo delle iperboli, tra le quali l'equilatera figura per $h = -\frac{3}{2}$.