Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 30 Giugno 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 2

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left((1,0,1)\right) \subseteq \operatorname{Ker} f\\
&V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}\\
&f(0,1,1) = (h-1,-1,h-1),
\end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori nel caso in cui essa è semplice.
2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0,\, 2x + y - t = 0\}$ e $W = \mathscr{L}\left((1,0,1,h+1),(h,0,1,2)\right)$. Calcolare $V + W$ e $V \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. Le condizioni date ci dicono che:

$$\begin{aligned}
f(1,0,1) &= (0,0,0)\\
f(1,1,1) &= (-1,-1,-1)\\
f(0,1,1) &= (h-1,-1,h-1),
\end{aligned}$$

dove $\mathscr{A} = [(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Dato che $[(h-1,-1,h-1)]_{\mathscr{A}} = (h,-1,0)$, abbiamo:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & h\\ 0 & -1-T & -1\\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T^2(-1-T),$$

per cui gli autovalori sono 0 e -1, con $m_0 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$, mentre $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Quindi, possiamo dire che f è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$, dove $V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \operatorname{Ker} f$. Dato che

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è evidente che $\dim V_0 = 2$ solo per $h = 0$. Quindi, per $h \neq 0$ f non è semplice, mentre per $h = 0$ f è semplice ed è possibile determinare una base di autovettori.

Sia $h=0$. Da:

$$M^{\mathscr{A}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_0=\{v\in\mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}}=(a,b,c),\ -b-c=0\}=\mathscr{L}\left((1,0,1),(1,1,1)-(0,1,1)\right)=\mathscr{L}\left((1,0,1),(1,0,0)\right).$$

Inoltre, sappiamo che $V_{-1}=\operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1}=f+i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1})=M^{\mathscr{A}}(f)+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_{-1}=\mathscr{L}\left((1,1,1)\right)$$

e una base di autovettori è $[(1,0,1),(1,0,0),(1,1,1)]$.

2. Si vede facilmente che:

$$V=\mathscr{L}\left((1,0,1,2),(0,1,2,1)\right)\Rightarrow V+W=\mathscr{L}\left((1,0,1,2),(0,1,2,1),(1,0,1,h+1),(h,0,1,2)\right).$$

Dato che:

$$\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&1\\1&0&1&h+1\\h&0&1&2\end{vmatrix}=(h-1)^2,$$

possiamo dire che i 4 vettori sono linearmente indipendenti per $h\neq 1$, per cui possiamo dire che $\dim(V+W)=4$, per cui, essendo $V+W\subseteq\mathbb{R}^4$, per $h\neq 1$ si ha $V+W=\mathbb{R}^4$. Osserviamo, poi, che si ha $\dim V=2$, mentre da:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&h+1\\h&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&0&1&h+1\\h-1&0&0&1-h\end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim W=2$ per $h\neq 1$, mentre per $h=1$ si ha $\dim W=1$. Quindi, per $h\neq 1$ abbiamo:

$$\dim(V\cap W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)=2+2-4=0\Rightarrow V\cap W=\{(0,0,0,0)\}.$$

Questo vuol dire che per $h\neq 0$ si ha che la somma $V+W$ è diretta e si ha $V\oplus W=\mathbb{R}^4$.

Sia $h=1$. In tal caso, abbiamo visto che $\dim W=1$ e chiaramente si ha $W=\mathscr{L}\left((1,0,1,2)\right)$ e, essendo $V=\mathscr{L}\left((1,0,1,2),(0,1,2,1)\right)$, si ha ovviamente $V\cap W=W$ e $V+W=V$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ tangenti alle rette $r\colon x+y-1=z=0$ e $s\colon x-2y+1=z=0$, rispettivamente, nei punti $A=(1,0,0)$ e $B=(-1,0,0)$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

2. Data la conica:

$$\Gamma\colon\begin{cases}x^2-y^2+2x-1=0\\z=0,\end{cases}$$

determinare il cono e il cilindro contenenti Γ e aventi vertici, rispettivamente, $V_1=(1,0,1)$ e $V_2=(1,0,1,0)$.

Soluzione

1. Il fascio di coniche ha equazione:

$$(x+y-1)(x-2y+1)+hy^2=0 \Rightarrow x^2-xy+(h-2)y^2+3y-1=0.$$

Sappiamo che, per costruzione, le uniche coniche spezzate sono quelle utilizzate per scriverne l'equazione, per cui per $h \neq 0$ le coniche sono irriducibili, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Dato che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & h-2 \end{vmatrix} = h - \frac{9}{4}$$

vediamo che per $h > \frac{9}{4}$ abbiamo delle ellissi reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = \frac{9}{4}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{9}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali l'equilatera si ottiene per $h=1$:

$$x^2-xy-y^2+3y-1=0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

per cui il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=0 \\ -\frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{6}{5}, \end{cases}$$

cioè è il punto di coordinate $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$.

2. Il generico punto di Γ è $P=(\alpha,\beta,0)$ dove $\alpha^2-\beta^2+2\alpha-1=0$. Il cono è il luogo delle rette PV_1. Dato che:

$$PV_1\colon \frac{x-1}{\alpha-1}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x-z}{1-z} \\ \beta = \frac{y}{1-z}, \end{cases}$$

sostituendo in $\alpha^2-\beta^2+2\alpha-1=0$ otteniamo:

$$\frac{(x-z)^2}{(1-z)^2}-\frac{y^2}{(1-z)^2}+2\frac{x-z}{1-z}-1=0 \Rightarrow (x-z)^2-y^2+2(x-z)(1-z)-(1-z)^2=0,$$

che è l'equazione del cono cercato.

Il cilindro è il luogo delle rette PV_2. Dato che:

$$PV_2\colon \begin{cases} x-\alpha=z \\ y=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=x-z \\ \beta=y. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2-\beta^2+2\alpha-1=0$ otteniamo:

$$(x-z)^2-y^2+2(x-z)-1=0.$$