# Corso di Laurea in
# Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 30 Giugno 2020

---

*Durata della prova: 90 minuti.*
*È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*È vietato consultare libri o appunti.* Compito 1

---

**I**

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$, lo spazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-1,-3,-2,-2) \\ f(v_2) &= (-h-1,-h-2,-1,-h-1) \\ f(v_3) &= (h+1,h+3,2,h+2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $v_1 + v_3$ e $v_1 + v_2 + v_3$ sono autovettori per $f$ associati allo stesso autovalore. Mostrare che per tale valore di $h$ $f$ è semplice e individuare in tal caso una base di autovettori per $f$.

2. Calcolare $f^{-1}(1,1,0,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

*Soluzione*

1. Dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{aligned} &f(v_1+v_3) = f(v_1) + f(v_3) = (h,h,0,h) = h(1,1,0,1) = h(v_1+v_3) \\ &f(v_1+v_2+v_3) = f(v_1)+f(v_2)+f(v_3) = (-1,-2,-1,-1) = -1(v_1+v_2+v_3), \end{aligned}$$

per cui il valore cercato è $h = -1$. Per tale valore di $h$ si ha:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-1,-3,-2,-2) \\ f(v_2) &= (0,-1,-1,0) \\ f(v_3) &= (0,2,2,1). \end{aligned}$$

È immediato vedere che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 0 \\ -2 & -1-T & 2 \\ -2 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (-1-T)^2(1-T).$$

Gli autovalori sono $-1$ e $1$, con $m_{-1} = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$ e che $(1,1,0,1), (1,2,1,1) \in V_{-1}$, per cui, essendo i due vettori linearmente indipendenti, si ha necessariamente $V_{-1} = \mathscr{L}((1,1,0,1),(1,2,1,1))$ e che, ovviamente, $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Ciò implica che per $h = -1$ $f$ è semplice.

Sia $T = 1$. In tal caso, sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a = 0,\ -2b + 2c = 0\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3) = \mathscr{L}\left((0, 1, 1, 1)\right).$$

Questo vuol dire che $[(1, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1)]$ è una base di autovettori per $f$ nel caso $h = -1$.

2. Dato che $[(1, 1, 0, 0)]_{\mathscr{A}} = (1, 0, 0)$, per calcolare $f^{-1}(1, 1, 0, 0)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -h-1 & h+1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -h-1 & h+2 & 0 \end{array}\right).$$

Dato che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -h$, concludiamo subito che per $h \neq 0$ il sistema ha una sola soluzione che possiamo determinare utilizzando il metodo di Cramer:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -h-1 & h+1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -h-1 & h+2 \end{vmatrix}}{-h} = -1,$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & h+1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & h+2 \end{vmatrix}}{-h} = -2,$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -h-1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -h-1 & 0 \end{vmatrix}}{-h} = -2.$$

Dunque, nel caso $h \neq 0$:

$$f^{-1}(1, 1, 0, 0) = \{-v_1 - 2v_2 - 2v_3\} = \{(-1, -3, -2, -2)\}.$$

Sia $h = 0$. In tal caso il sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui abbiamo $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ e le soluzioni sono $\infty^1$:

$$\begin{cases} -a - b + c = 1 \\ -a + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1, 1, 0, 0) = \{(c + 1)v_1 - 2v_2 + cv_3 \in V\} = \{(c + 1, c - 1, -2, c) \in \mathbb{R}^4\}.$$

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare la retta $s$ incidente la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0, \end{cases}$$

parallela a $\pi\colon x + y + 2z + 2 = 0$ e passante per $P = (1, 0, 0)$.

2. Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:

$$x^2 - 2hxy + y^2 + z^2 + 2hz - 1 = 0,$$

determinando, in particolare, i vertici dei cilindri.

*Soluzione*

1. La retta $s$ è intersezione del piano $\alpha$ contenente $r$ e passante per $P$ con il piano $\beta$ parallelo a $\pi$ e passante per $P$.

   I piani contenenti $r$ hanno equazione:

$$\lambda(x - y) + \mu(z - 1) = 0.$$

   Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo $\lambda - \mu = 0$, per cui:

$$\alpha\colon\ x - y + z - 1 = 0.$$

   I piani contenenti paralleli a $\pi$ hanno equazione:

$$\pi\colon\ x + y + 2z + k = 0.$$

   Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo $\beta\colon\ x + y + 2z - 1 = 0$. Dunque:

$$s\colon\ \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & h & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Si ha $|B| = (h^2 - 1)(h^2 + 1)$ e $|A| = 1 - h^2$. Quindi, per $h = \pm 1$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e le quadriche sono dei cilindri oppure sono spezzate.

   Sia $h = 1$. In tal caso:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\rho(B) = 3$ e la quadrica è un cilindro il cui vertice è dato da:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

   cioè esso è $V_1 = (1, 1, 0, 0)$.

   Sia $h = -1$. In tal caso:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(B) = 3$ e la quadrica è un cilindro il cui vertice è dato da:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ -2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

cioè esso è $V_2 = (1, -1, 0, 0)$.

Sia $h \neq \pm 1$, per cui $|B| \neq 0$ e $|A| \neq 0$. Le quadriche in questo caso sono ellissoidi o iperboloidi. Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & -h & 0 \\ -h & 1 - T & 0 \\ 0 & 0 & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)[T^2 - 2T + 1 - h^2],$$

vediamo che gli autovalori sono concordi per $-1 < h < 1$ e discordi per $h < -1$ e $h > 1$. Dunque, per per $-1 < h < 1$ abbiamo degli ellissoidi reali, in quanto in tal caso si ha $|B| < 0$, e per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, in quanto in tal caso si ha $|B| > 0$.