Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 Gennaio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -h & -3 & h+2 & 2-h \\ -h & -2h-1 & h+1 & h+1 \\ -h & 1-h & h & 0 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine.
2. Siano $v_1 = (1,-1,1,-2)$, $v_2 = (1,0,0,1)$, $v_3 = (0,1,1,0)$ e $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. Determinare l'equazione cartesiana di V ed il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\operatorname{Ker} f \subset V$.
3. Per il valore di h di cui al punto precedente studiare l'applicazione lineare $g = f|_V\colon V \to \mathbb{R}^3$ restrizione di f a V.
4. Diagonalizzare la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g)$, dove $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$.
5. <u>Esercizio facoltativo.</u> Determinare una matrice associata alla generica applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi|_V = g$.

Soluzione

1. Da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -h & -3 & h+2 & 2-h \\ -h & -2h-1 & h+1 & h+1 \\ -h & 1-h & h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con } h\neq 0} \begin{pmatrix} -h & -3 & h+2 & 2-h \\ 0 & 2-2h & -1 & 2h-1 \\ 0 & 3h & 0 & -3h \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$, per cui f è suriettiva e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -hx - 3y + (h+2)z + (2-h)t = 0,\ (2-2h)y - z + (2h-1)t = 0,\ 3hy - 3ht = 0\} = \\ = \mathscr{L}((1,h,h,h)).$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(-3,-1,1),(2,1,0)]$, mentre $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -3y + 2z + 2t = 0,\ y = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,0,1,-1)).$$

2. Si vede facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\dim V = 3$. Calcoliamone l'equazione cartesiana:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -2x - 3y + 3z + 2t.$$
Dunque:
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x - 3y + 3z + 2t = 0\}.$$
$\operatorname{Ker} f \subset V$ se ogni suo generatore verifica l'equazione cartesiana di V.

Sia $h \neq 0$. In tal caso, sappiamo che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1, h, h, h))$ e vediamo subito che $(1, h, h, h) \in V$ solo per $h = 1$.

Nel caso $h = 0$ sappiamo che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ e, dato che $(1, 0, 0, 0) \notin V$ (come pure $(0, 0, 1, -1)$), vediamo che per $h = 0$ $\operatorname{Ker} f$ non è un sottospazio di V. Dunque, il valore cercato è $h = 1$.

3. Per $h = 1$ sappiamo che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, si vede facilmente che:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= (3, 0, 0) \\ f(v_2) &= (0, 1, -1) \\ f(v_3) &= (0, -1, 1), \end{aligned}$$
da cui:
$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ne deduciamo che $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g)) = 2$ e una sua base è $[(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 2 = 1$ e, essendo g restrizione di f e $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1, 1, 1, 1)) \subset V$, deve essere necessariamente $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}((1, 1, 1, 1))$.

4. Per diagonalizzare la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g)$ occorre considerare l'endomorfismo $\psi \colon \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che la sua matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:
$$M(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcoliamone il polinomio caratteristico:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & -1 \\ 0 & -1 & 1-T \end{vmatrix} = (3-T)(T^2 - 2T).$$
Quindi, gli autovalori sono 3, 2 e 0, tutti distinti a due a due e di molteplicità algebrica 1. Ciò significa che φ è semplice e che la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g')$ è diagonalizzabile. Per diagonalizzarla occorre calcolare gli autospazi.

Si vede facilmente che $V_3 = \mathscr{L}((1, 0, 0))$, $V_2 = \mathscr{L}((0, 1, -1))$ e $V_0 = \mathscr{L}((0, 1, 1))$. Dunque, possiamo dire che $P^{-1} \cdot M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g) \cdot P = P^{-1} \cdot M(\psi) \cdot P = D$, dove:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. La generica applicazione lineare φ richiesta è tale che:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &= g(v_1) = (3,0,0)\\ \varphi(v_2) &= g(v_2) = (0,1,-1)\\ \varphi(v_3) &= g(v_3) = (0,-1,1).\end{aligned}$$

Per assegnare un'applicazione lineare occorre assegnare le immagini di una base del dominio. Completiamo, perciò, a base, scegliendo un vettore non appartenente a V, per esempio $e_1 = (1,0,0,0) \notin V$. La generica applicazione φ richiesta sarà tale che:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &= (3,0,0)\\ \varphi(v_2) &= (0,1,-1)\\ \varphi(v_3) &= (0,-1,1)\\ \varphi(e_1) &= (a,b,c),\end{aligned}$$

per qualche $a,b,c \in \mathbb{R}$. Posta $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3, e_1]$, concludiamo che:

$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 0 & -1 & 1 & c\end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnate le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = z-1\\ y = z\end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x+y=0\\ z=0\end{cases}$$

ed i piani $\alpha\colon y+z+1=0$ e $\beta\colon x+3y+z=0$. Determinare le equazioni della retta t incidente le rette r e s e parallela ai piani α e β. Dati i punti $A=(0,1,1)$ e $B=(-2,2,0)$, determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e l'equazione del piano parallelo a β e passante per M.

2. Sono assegnati i punti $O=(0,0,0)$, $A=(1,1,0)$ e $B=(-2,0,0)$ e la retta $s\colon x+y=z=0$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ passanti per O, A e B e tangenti in O alla retta s.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2y^2 + 2kyz + 2xy + 2z - k = 0.$$

Soluzione

1. I generici punti di r e s sono, rispettivamente, $A=(a-1,a,a)$ e $B=(b,-b,0)$. La retta t è una retta del tipo AB per qualche A e B. La retta AB ha parametri direttori $(a-b-1, a+b, a)$. Perché la retta t sia parallela ai piani dati deve essere:

$$\begin{cases}(a+b)+a=0\\ (a-b-1)+3(a+b)+a=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-2.\end{cases}$$

Dunque, la retta t è la retta passante per i punti $A=(0,1,1)$ e $B=(-2,2,0)$, per cui:

$$t\colon -\frac{x}{2} = y-1 = -(z-1) \Rightarrow t\colon \begin{cases} x-2z+2=0\\ y+z-2=0.\end{cases}$$

Si vede che $M = (-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e che il piano cercato ha equazione del tipo:

$$x+3y+z+d=0.$$

Imponendo il passaggio per M otteniamo $d=-4$, per cui il piano ha equazione $x+3y+z-4=0$.

2. Le coniche spezzate del fascio sono $s \cup AB$: $(x+y)(x-3y+2)=0$ e $OA \cup OB$: $y(x-y)=0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$hy(x-y)+(x+y)(x-3y+2)=0 \Rightarrow x^2+(h-2)xy-(h+3)y^2+2x+2y=0.$$

Sappiamo che le due coniche utilizzate per scrivere l'equazione del fascio sono le uniche spezzate, per cui possiamo dire che per $h=0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h \neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & -h-3 \end{vmatrix} = -\frac{h^2+16}{4}$$

vediamo che le coniche per $h \neq 0$ sono tutte delle iperboli. In particolare, dato che $\mathrm{Tr}(A) = -2-h$, per $h=-2$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Dato che:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^3-1 \quad \text{e} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = -k^2,$$

vediamo che per $k=1$ abbiamo un cono, mentre per $k=0$ abbiamo un paraboloide ellittico. Inoltre, essendo $P_A(T) = -T^3+3T^2+(k^2-1)T-k^2$, concludiamo che le quadriche, per $k \neq 0, 1$ sono tutte iperboloidi. In particolare, per $k>1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $k<1$, $k \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi ellittici.