Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr), Ingegneria Industriale (A-E e F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Febbraio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x-y+hz, x-2y+z, hx+y+z, x+hy+hz) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine.
2. Dato $V = \mathscr{L}((1,1,-1,1),(-1,-2,1,-1))$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale la somma $\operatorname{Im} f + V$ è diretta e calcolare, in tal caso, $\operatorname{Im} f \oplus V$.
3. Calcolare $f^{-1}(0,1,0,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Data $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $p(x,y,z,t) = (x, -x+y, -x+t)$, sia $g = p \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale il vettore $(1,2,0)$ è autovettore per g e, per tale valore di h, diagonalizzare $M(g)$.

Soluzione

1. Si vede facilmente che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 1 & -2 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \end{pmatrix}.$$
Calcoliamone un minore:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & h \\ 1 & -2 & 1 \\ h & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2h^2 - 2.$$
Esso è non nullo per $h \neq \pm 1$. Ciò vuol dire che per $h \neq \pm 1$ deve essere $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$. In particolare, una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1,1,h,1),(-1,-2,1,h),(h,1,1,h)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e f è iniettiva.
Sia $h = 1$. In tal caso, si ha:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,1,1),(-1,-2,1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0,\ -y=0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso, si ha:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,-1,1),(-1,-2,1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0,\ -y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((3,2,1)).$$

2. La somma $\operatorname{Im} f + V$ è diretta se $\operatorname{Im} f \cap V = \{(0,0,0,0)\}$. È chiaro che per $h = -1$ abbiamo $V = \operatorname{Im} f$, per cui per $h = -1$ la somma certamente non è diretta. Se $h \neq \pm 1$, abbiamo che $\dim \operatorname{Im} f = 3$. Dato che certamente $\dim(\operatorname{Im} f + V) \leq 4$ e che $\dim(\operatorname{Im} f + V) = \dim \operatorname{Im} f + \dim V - \dim(\operatorname{Im} f \cap V)$, abbiamo:
$$\dim(\operatorname{Im} f \cap V) = \dim \operatorname{Im} f + \dim V - \dim(\operatorname{Im} f + V) \geq 3 + 2 - 4 = 1.$$
Ciò vuol dire che anche per $h \neq \pm 1$ la somma non è diretta. Vuol dire che la somma deve essere diretta per $h = 1$. Infatti, in tal caso $\operatorname{Im} f + V = \mathscr{L}((1,1,1,1),(-1,-2,1,1),(1,1,-1,1),(-1,-2,1,-1))$ e da:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che $\dim(\operatorname{Im} f + V) = 4$. Dunque:
$$\dim(\operatorname{Im} f \cap V) = \dim f + \dim V - \dim(\operatorname{Im} f + V) = 0,$$
per cui $\operatorname{Im} f \cap V = \{(0,0,0,0)\}$. Dunque, effettivamente per $h = 1$ la somma è diretta e $\operatorname{Im} f \oplus V = \mathbb{R}^4$.

3. Dobbiamo risolvere il sistema lineare la cui matrice completa associata è:
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & h & 0 \end{array}\right).$$
Da $\det(A|B) = (h+1)^2(h-1)$ deduciamo che per $h \neq \pm 1$ il sistema è impossibile e $f^{-1}(0,1,0,0) = \emptyset$.

Sia $h = 1$. In tal caso, abbiamo:
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Dunque, anche in questo caso il sistema è impossibile e $f^{-1}(0,1,0,0) = \emptyset$.

Sia $h = -1$. In tal caso, abbiamo:
$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
In tal caso, il sistema ammette ∞^1 soluzioni e:
$$f^{-1}(0,1,0,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0,\ -y + 2z = 1\} = \{(3z-1, 2z-1, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

4. Si ha:

$$M(g) = M(p) \circ M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 1 & -2 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 0 & -1 & 1-h \\ 0 & h+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che $f(1,2,0) = (-1,-2,2h+2)$, per cui $(1,2,0)$ è autovettore se la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2h+2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Ciò accade se $h = -1$, per cui accade che $f(1,2,0) = (-1,-2,0) = -1 \cdot (1,2,0)$, il che vuol dire che $(1,2,0)$ è autovettore associato all'autovalore -1 nel caso $h = -1$. Da:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & -1 \\ 0 & -1-T & 2 \\ 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T(1-T)(-1-T)$$

vediamo che gli autovalori sono $0, 1$ e -1, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui g è semplice e $M(g)$ è diagonalizzabile nel caso $h = -1$. Sappiamo già che $V_{-1} = \mathscr{L}((1,2,0))$. Inoltre, si vede subito che $V_1 = \mathscr{L}((1,0,0))$ e inoltre:

$$V_0 = \operatorname{Ker} g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0,\ -y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((3,2,1)).$$

Dunque, $P^{-1} \cdot M(g) \cdot P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

ed il punto $P = (0,1,0)$. Determinare la retta s passante per P e ortogonale e incidente la retta r. Detta t la retta passante per P e parallela a r, calcolare la distanza $d(t,r)$.

2. Determinare e studiare le coniche del piano $z = 0$ tangenti alle rette $r_1\colon x - y + 1 = z = 0$ e $r_2\colon x + y - 1 = z = 0$ nei punti in cui esse incontrano la retta $p\colon 2x + y = z = 0$. Determinare la conica del fascio avente l'asse $\vec{x}$ come asintoto.

3. Determinare la natura del paraboloide contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

l'asse $\vec{z}$ e il punto $P = (1,0,1)$.

Soluzione

1. Il generico punto della retta r è $R = (a, a+2, 2a+1)$, per cui la retta PR ha parametri direttori $(a, a+1, 2a+1)$. Dato che la retta r ha parametri direttori $(1,1,2)$, deve essere $a + (a+1) + 2(2a+1) = 0$, per cui $a = -\frac{1}{2}$ e la retta $s = PR$, dove $R = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$:

$$s\colon \begin{cases} z = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Dato che la retta t è parallela a r e $P \in r$:

$$d(t,r) = d(P,r) = \overline{PR} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono quelle di equazione $(2x+y)^2 = 0$ e $(x-y+1)(x+y-1) = 0$, per cui esso ha equazione:

$$h(2x+y)^2 + (x-y+1)(x+y-1) = 0 \Rightarrow (4h+1)x^2 + 4hxy + (h-1)y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, per cui per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4h+1 & 2h \\ 2h & h-1 \end{vmatrix} = -3h - 1$$

vediamo che $|A| > 0$ per $h < -\frac{1}{3}$ e in tal caso abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = -\frac{1}{3}$ si ha $|A| = 0$ e in tal caso abbiamo una parabola; per $h > -\frac{1}{3}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Ricordiamo che un asintoto è una retta tangente all'iperbole in uno dei suoi punti impropri. Quindi, da:

$$\begin{cases} (4h+1)x^2 + 4hxy + (h-1)y^2 + 2yt - t^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4h+1)x^2 - t^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

vediamo che la tangenza si ha per $h = -\frac{1}{4}$, per cui l'iperbole cercata ha equazione:

$$-xy - \frac{5}{4}y^2 + 2y - 1 = 0.$$

3. Il paraboloide cercato contiene una retta reale, per cui deve necessariamente essere un paraboloide iperbolico. Alternativamente, è possibile determinare il paraboloide per conoscerne la natura. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2 + x - y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecandole con l'asse $\vec{z}$:

$$\begin{cases} x^2 + x - y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2 + dz = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

vediamo che esso è contenuto nella quadrica se $c = d = 0$. Dunque, abbiamo le quadriche $x^2 + x - y + z(ax + by) = 0$. Imponendo il passaggio per P abbiamo $a = -2$, per il paraboloide cercato è tra le quadriche di equazione $x^2 + x - y + z(-2x + by) = 0$. Dato che:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ -1 & \frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $|A| = -\frac{b^2}{4}$. Dunque, il paraboloide cercato si ottiene per $b = 0$ ed esso ha equazione $x^2 - 2xz + x - y = 0$ e, essendo per $b = 0$ $|B| = \frac{1}{4} > 0$, esso è un paraboloide iperbolico.