Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr), Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 25 Settembre 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,0,-1,0)$, lo spazio vettoriale $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, h+1, 0, 1) \\ f(v_2) &= (2, 2, -1, 1) \\ f(v_3) &= (h, h-1, -h, h-1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$.
2. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali 1 è autovalore per f e per tali valori di h studiare la semplicità di f, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. È semplice vedere che la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è base di V. Scriviamo la matrice $M^{\mathscr{A}}(f)$. Da:

$$(h, h+1, 0, 1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,0,0) + b(0,1,0,1) + c(1,0,-1,0) = (a+c, a+b, -c, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = h \\ a+b = h+1 \\ -c = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = h \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

segue che $[f(v_1)]_{\mathscr{A}} = [(h, h+1, 0, 1)]_{\mathscr{A}} = (h, 1, 0)$. Analogamente, da:

$$(2, 2, -1, 1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,0,0) + b(0,1,0,1) + c(1,0,-1,0) = (a+c, a+b, -c, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = 2 \\ a+b = 2 \\ -c = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

segue che $[f(v_2)]_{\mathscr{A}} = [(2, 2, -1, 1)]_{\mathscr{A}} = (1, 1, 1)$. Infine, da:

$$(h, h-1, -h, h-1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,0,0) + b(0,1,0,1) + c(1,0,-1,0) = (a+c, a+b, -c, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = h \\ a+b = h-1 \\ -c = -h \\ b = h-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = h-1 \\ c = h \end{cases}$$

segue che $[f(v_3)]_{\mathscr{A}} = [(h, h-1, -h, h-1)]_{\mathscr{A}} = (0, h-1, h)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 1 & h-1 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, possiamo dire che f non è mai un isomorfismo e che $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) \leq 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Essendo non nullo il seguente minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

concludiamo che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e che $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. In particolar modo, vediamo che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2)) = \mathscr{L}((h, h+1, 0, 1), (2, 2, -1, 1))$$

e che:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a + b + (h-1)c = 0,\ b + hc = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (c, -hc, c)\} = \mathscr{L}(v_1 - hv_2 + v_3) = \mathscr{L}((2, 1-h, -1, -h)). \end{aligned}$$

Vogliamo trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\mathscr{L}((2, 1-h, -1, -h)) \subseteq \mathscr{L}((h, h+1, 0, 1), (2, 2, -1, 1))$, cioè per i quali $(2, 1-h, -1, -h) \in \mathscr{L}((h, h+1, 0, 1), (2, 2, -1, 1))$. Consideriamo la matrice e riduciamola senza scambiare le righe:

$$\begin{pmatrix} h & h+1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1-h & -1 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h & h+1 & 0 & 1 \\ 2-h & 1-h & -1 & 0 \\ h^2+h & h^2+h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la terza riga nella matrice ridotta non è nulla se $h^2 + h \neq 0$, cioè $(2, 1-h, -1, -h) \notin \mathscr{L}((h, h+1, 0, 1), (2, 2, -1, 1))$ se $h^2 + h \neq 0$. Altrimenti, se $h = 0, -1$ si ha $(2, 1-h, -1, -h) \in \mathscr{L}((h, h+1, 0, 1), (2, 2, -1, 1))$, cioè $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$.

2. Affinché 1 sia autovalore per f deve essere:

$$\begin{vmatrix} h-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -h^2 + h = 0 \Leftrightarrow h = 0, 1.$$

Quindi, 1 è autovalore per $h = 0$ e $h = 1$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 1 & 1-T & -1 \\ 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = T^2(1-T).$$

Quindi, in tal caso gli autovalori sono 0 e 1 con $m_0 = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che f è semplice se allo stesso momento si ha $\dim V_0 = m_0 = 2$ e $\dim V_1 = m_1 = 1$. Tuttavia, sappiamo anche $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e abbiamo visto che $\dim \operatorname{Ker} f = 1 < 2 = m_0$ per $h = 0$. Quindi, in tal caso f non è semplice e non è possibile determinare una base di autovettori.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 \\ 1 & 1-T & 0 \\ 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 2T).$$

Quindi, in tal caso gli autovalori sono 0, 1 e 2, tutti con molteplicità algebrica pari a 1, per cui f è certamente semplice per $h = 1$ e ammette una base di autovettori. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((2, 0, -1, -1))$.

Sia $T = 1$. In tal caso, sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui chiaramente si ha:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a = 0,\ b = 0\} = \mathscr{L}(v_3) = \mathscr{L}((1, 0, -1, 0)).$$

Sia $T = 2$. In tal caso, sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui chiaramente si ha:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a = b,\ b = c\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}((2, 2, -1, 1)).$$

Dunque, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(2, 0, -1, 1), (1, 0, -1, 0), (2, 2, -1, 1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + (h-2)xy + (h+1)y^2 - hx - hy = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

2. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 - 2xy - 2xz + hz^2 - 2y + 1 = 0.$$

Soluzione

1. Per $h = \infty$ abbiamo la conica di equazione:

$$xy + y^2 - x - y = 0 \Rightarrow (x+y)(y-1) = 0,$$

per cui essa è spezzata in due rette reali e distinte. Dato che:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} & -\dfrac{h}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & h+1 & -\dfrac{h}{2} \\ -\dfrac{h}{2} & -\dfrac{h}{2} & 0 \end{vmatrix} = -h^2,$$

l'altra conica spezzata del fascio è ottenuta per $h = 0$ ed ha equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0,$$

mentre per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte irriducibili. Dunque, possiamo facilmente determinare i punti base del fascio:

$$\begin{cases} (x+y)(y-1) = 0 \\ (x-y)^2 = 0, \end{cases}$$

per cui essi sono i punti $(0,0)$ e $(1,1)$, entrambi contati due volte nel computo dei punti base. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & h+1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2+8h}{4}$$

otteniamo che per $h = 8$ abbiamo l'unica parabola del fascio, in quanto per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $0 < h < 8$ abbiamo delle ellissi reali, in quanto i punti base sono reali, e non figurano circonferenze nel fascio; per $h < 0$ e $h > 8$ abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h = -2$, poiché $\mathrm{Tr}(A) = h + 2$.

L'iperbole equilatera ha equazione:

$$x^2 - 4xy - y^2 + 2x + 2y = 0$$

e la matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È possibile ricavare le coordinate del centro di simmetria risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{3}{5}, \end{cases}$$

per cui il centro di simmetria è il punto $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = 1 - 2h$ e $|A| = -h$, concludiamo facilmente che per $h = \frac{1}{2}$ abbiamo un cono e che per $h = 0$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h \neq 0, \frac{1}{2}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & -1 \\ -1 & -T & 0 \\ -1 & 0 & h-T \end{vmatrix} = -T^3 + (h+1)T^2 + (2-h)T - h.$$

Si vede facilmente che i due sistemi:

$$\begin{cases} h+1 > 0 \\ 2-h < 0 \\ -h > 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} h+1 < 0 \\ 2-h < 0 \\ -h < 0 \end{cases}$$

non hanno soluzioni. Ciò vuol dire che gli autovalori di A non sono mai concordi e, in particolare, le quadriche non sono mai ellissoidi. In particolare, per $h < \frac{1}{2}$, $he0$ le quadriche sono tutte iperboloidi iperbolici e per $h > \frac{1}{2}$ le quadriche sono tutte iperboloidi ellittici. Inoltre, per $h = 0$ il cono è reale.