Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 14 Gennaio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. È dato l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 + 2v_2 \\ f(v_2) &= -kv_1 + kv_2 + 2kv_3 \\ f(v_3) &= v_1 + v_2 - v_3, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, determinando, in particolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, nucleo e immagine.
2. Dato $u = (1,2,0,3)$, mostrare che $u \in V$ e determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale u è autovettore per f, specificando il valore dell'autovalore associato.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori nei casi $k = 0$ e $k = 1$.
4. Dato $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 6x - 3y + 4z = 0,\ 9x + 7z - 3t = 0\}$ e $W = \mathscr{L}(v_1, v_2 + v_3)$, determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale $f(W) = U$.

Soluzione

1. È facile vedere che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V, poiché i 3 vettori sono linearmente indipendenti e sono generatori di V per costruzione. Inoltre, vediamo subito che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 2k & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -k$, per cui per $k \neq 0$ f è un isomorfismo, il che significa che f è iniettiva e suriettiva, e deduciamo subito che $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $k = 0$. In tal caso, abbiamo:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ (si trova immediatamente un minore di ordine 2 non nullo). Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è determinata dalla prima e dalla terza colonna di $M^{\mathscr{A}}(f)$, per cui essa è $[v_1 + 2v_2, v_1 + v_2 - v_3]$. Il fatto che la seconda colonna di $M^{\mathscr{A}}(f)$ sia nulla implica che $v_2 \in \operatorname{Ker} f$. Dovendo essere $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$, ne segue che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_2)$.

2. Verifichiamo che u è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3, determinandone, al tempo stesso, le componenti rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$u = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow (1,2,0,3) = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,1) \Rightarrow (1,2,0,3) = (a,b,c,a+b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \\ a+b+c = 3. \end{cases}$$

È evidente che il sistema ammette soluzioni, per cui $u \in V$. Inoltre, abbiamo anche che $u = v_1 + 2v_2$. Dunque:

$$f(u) = f(v_1) + 2f(v_2) = (1-2k)v_1 + (2+2k)v_2 + 4kv_3.$$

Vogliamo trovare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale i vettori $(1-2k)v_1 + (2+2k)v_2 + 4kv_3$ e $v_1 + 2v_2$ sono proporzionali. Essendo $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ una base, è sufficiente che le componenti $[f(u)]_{\mathscr{A}} = (1-2k, 2+2k, 4k)$ e $[u]_{\mathscr{A}} = (1,2,0)$ siano proporzionali. Da:

$$\begin{pmatrix} 1-2k & 2+2k & 4k \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo subito che l'unica possibilità è che $k = 0$ e, in tal caso, vediamo che $f(u) = v_1 + 2v_2 = u$. Ciò significa che effettivamente per $k = 0$ u è autovettore e l'autovalore associato è 1.

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -k & 1 \\ 2 & k-T & 1 \\ 0 & 2k & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(k-T)(-1-T).$$

Perciò, gli autovalori sono 1, -1 e k. Deduciamo subito che per $k \neq 1, -1$ f è semplice.

Sia $k = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1 con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. f è semplice se contemporaneamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, immediatamente abbiamo che vale l'uguaglianza $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Invece, abbiamo $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Sia, dunque, $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \ker f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 1 < 2 = m_1$. Dunque, per $k = 1$ f non è semplice, il che vuol dire che per $k = 1$ non è possibile determinare una base di autovettori.

Sia $k = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1 con $m_1 = 1$ e $m_{-1} = 2$. f è semplice se contemporaneamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Dato che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, immediatamente abbiamo che vale l'uguaglianza $\dim V_1 = m_1 = 1$. Invece, abbiamo $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$. Sia, dunque, $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \ker f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 2$ e $\dim V_{-1} = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 1 < 2 = m_{-1}$. Dunque, anche per $k = -1$ f non è semplice.

Infine, sia $k = 0$. Abbiamo visto che in tal caso f è semplice, per cui possiamo determinare una base di autovettori per f. Sappiamo che gli autovalori sono 0, 1 e -1, tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui tutti gli autospazi hanno dimensione 1. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_2)$ e nel punto precedente abbiamo verificato che $v_1 + 2v_2 \in V_1$ per $k = 0$. Quindi, dovendo essere $\dim V_1 = 1$, possiamo dire che per $k = 0$ $V_1 = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2)$. Resta da determinare l'autospazio V_{-1}. Sappiamo che $V_{-1} = \ker f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue:

$$V_{-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\, 2a + c = 0,\, b = 0\} = \{av_1 - 2av_3 \in V\} = \mathscr{L}(v_1 - 2v_3).$$

Quindi, per $k = 0$ una base di autovettori per f è $[v_2, v_1 + 2v_2, v_1 - 2v_3]$.

4. Sappiamo che $f(W) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2 + v_3))$. Inoltre:

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 \quad \text{e} \quad f(v_2 + v_3) = f(v_2) + f(v_3) = (1 - k)v_1 + (1 + k)v_2 + (-1 + 2k)v_3,$$

per cui $f(W) = \mathscr{L}((1, 2, 0, 3), (1 - k, 1 + k, -1 + 2k, 1 + 2k))$. $f(W) \subseteq U$ se i due generatori $(1, 2, 0, 3)$, $(1 - k, 1 + k, -1 + 2k, 1 + 2k)$ verificano le sue equazioni cartesiane. Si vede subito che $(1, 2, 0, 3)$ le verifica entrambe, per cui $(1, 2, 0, 3) \in U$. $(1 - k, 1 + k, -1 + 2k, 1 + 2k) \in U$ se:

$$\begin{cases} 6(1 - k) - 3(1 + k) + 4(-1 + 2k) = 0 \\ 9(1 - k) + 7(-1 + 2k) - 3(1 + 2k) = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -1.$$

Dunque, per $k = -1$ abbiamo $f(W) = \mathscr{L}((1, 2, 0, 3), (2, 0, -3, -1)) \subseteq U$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim W = \dim U = 2$ e, essendo $f(W) \subseteq U$, si ha che $f(W) = U$ per $k = -1$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases}$$

determinare il piano π passante per il punto $P = (6, 2, 0)$ e parallelo alle rette r e s. Determinare la retta t simmetrica di s rispetto a π.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, -1)$ e $D = (-1, 1)$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare il cono e il cilindro contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V_1 = (1, 0, 1)$ e $V_2 = (0, 1, 1, 0)$.

Soluzione

1. È semplice vedere che $(1, 7, 3)$ e $(2, -1, 1)$ sono parametri direttori, rispettivamente, di r e s. Dunque, un vettore di componenti (a, b, c) è ortogonale al piano π se:

$$\begin{cases} a + 7b + 3c = 0 \\ 2a - b + c = 0, \end{cases}$$

da cui deduciamo che il vettore dato è parallelo al vettore di componenti $(2, 1, -3)$. Possiamo dire allora che:

$$\pi\colon 2(x-6)+y-2-3z=0 \Rightarrow \pi\colon 2x+y-3z-14=0.$$

Prendiamo un punto qualsiasi di s, per esempio $Q=(-1,2,0)\in s$, e cerchiamo il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π. La retta p passante per Q e ortogonale a π ha equazioni:

$$p\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-3t, \end{cases}$$

per cui il punto $H=p\cap\pi$ è dato da:

$$H\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-3t \\ 2x+y-3z-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-3t \\ 14t-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=1 \\ y=3 \\ z=-3. \end{cases}$$

Dunque, $H=(1,3,-3)$ e il punto $Q'=(a,b,c)$ è tale che H è il punto medio di Q e Q', per cui deve accadere:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{2}=1 \\ \dfrac{b+2}{2}=3 \\ \dfrac{c}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=-6. \end{cases}$$

Allora $Q'=(3,4,-6)$ e la retta t è parallela a s e passa per Q':

$$t\colon \frac{x-3}{2}=-(y-4)=z+6 \Rightarrow t\colon \begin{cases} x+2y-11=0 \\ y+z+2=0. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono $AB\cup CD\colon (x+y-1)(x+y)=0$, $AC\cup BD\colon (2x+y-1)(x+2y-1)=0$ e $AD\cup BC\colon (x-1)(y-1)=0$. Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$h(x+y-1)(x+y)+(x-1)(y-1)=0 \Rightarrow hx^2+(2h+1)xy+hy^2-(h+1)x-(h+1)y+1=0.$$

Le matrici associate al fascio sono:

$$B=\begin{pmatrix} h & \dfrac{2h+1}{2} & -\dfrac{h+1}{2} \\ \dfrac{2h+1}{2} & h & -\dfrac{h+1}{2} \\ -\dfrac{h+1}{2} & -\dfrac{2h+1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & \dfrac{2h+1}{2} \\ \dfrac{2h+1}{2} & h \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B|=\frac{h^2-2h}{4}$, per cui le coniche spezzate del fascio si hanno per $h=0$ e $h=2$. Inoltre, da $|A|=\frac{-4h-1}{4}$ vediamo che per $h<-\frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi (tutte reali, poiché i punti base sono reali), tra le quali figura una circonferenza per $h=-\frac{1}{2}$; per $h=-\frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h>-\frac{1}{4}$, $h\neq 0,2$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Il generico punto della conica Γ è $P=(\alpha,\beta,0)$, dove $\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta-1=0$. Le retta PV_1 ha equazioni:

$$\frac{x-1}{\alpha-1}=\frac{y}{\beta}=-(z-1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{\alpha-1}=1-z \\ \dfrac{y}{\beta}=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{x-z}{1-z} \\ \beta=\dfrac{y}{1-z}. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0$ otteniamo l'equazione del cono:

$$\frac{(x-z)^2}{(1-z)^2} - \frac{y^2}{(1-z)^2} - 2\frac{(x-z)y}{(1-z)^2} - 1 = 0 \Rightarrow (x-z)^2 - y^2 - 2(x-z)y - (1-z)^2 = 0.$$

Procediamo in maniera analoga per il cilindro. La retta PV_2 ha equazioni:

$$\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ y - \beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0$ otteniamo l'equazione del cilindro:

$$x^2 - (y-z)^2 - 2x(y-z) - 1 = 0.$$