Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 13 Luglio 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti. Compito 5

I

È assegnato lo spazio vettoriale $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. Determinare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $V \subseteq V_{-1}$, essendo V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore -1, e $f(1, 0, 0) = (0, h, 0)$ e studiarne la semplicità al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

2. Sono assegnate le applicazioni lineari $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & h+1 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix},$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, e $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $p(x, y, z) = (x, y, z, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determinare $\varphi = g \circ p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e trovare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale:
$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
dove $\mathscr{A} = [(1, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)]$. Per tale valore di h diagonalizzare $M^{\mathscr{A}}(\varphi)$.

Soluzione

1. Dato che $V = \mathscr{L}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$, deve essere:
$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= (-1, -1, 0) \\ f(0, 1, 1) &= (0, -1, -1) \\ f(1, 0, 0) &= (0, h, 0), \end{aligned}$$
da cui si ottiene facilmente:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ h & -h-1 & h \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dunque:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 & 1 \\ h & -h-1-T & h \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (-1-T)^2(-h-T).$$
Questo vuol dire che per $h \neq 1$ gli autovalori sono -1 e $-h$, con $m_{-1} = 2$ e $m_{-h} = 1$, mentre per $h = 1$ l'unico autovalore è -1 con $m_{-1} = 3$.

Sia $h \neq 1$. In tal caso sappiamo che necessariamente $\dim V_{-h} = 1 = m_{-h}$, mentre $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 2$, per cui f è semplice se $\dim V_{-1} = 2 = m_{-1}$. Tuttavia, per costruzione sappiamo anche che

$V \subseteq V_{-1}$, dove $\dim V = 2$: ciò vuol dire che per $h \neq 1$ si ha $V = V_{-1}$ e f in tal caso è semplice. Per determinare una base di autovettori occorre determinare $V_{-h} = \operatorname{Ker} f_{-h}$, dove $f_h = f + hi$ e:

$$M(f_{-h}) = M(f) + hI = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ h & -1 & h \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, ricordando che $h \neq 1$, abbiamo:

$$V_{-h} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + z = 0,\ (h-1)z = 0\} = \mathscr{L}((1,h,0)).$$

Questo ci dice che per $h \neq 1$ una base di autovettori è $[(1,1,0),(0,1,1),(1,h,0)]$.
Sia $h = 1$. In questo caso f è semplice se $\dim V_{-1} = 3 = m_{-1}$, dove $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso si ha $\dim V_{-1} = 3 - 1 = 2 < 3 = m_{-1}$, per cui per $h = 1$ f non è semplice.

2. Sappiamo che:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(p) = M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & h+1 \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire che

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

significa dire che:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,-1) &= (0,0,0) \\ \varphi(1,0,0) = h(1,0,0) + (1,1,0) &= (h+1,1,0) \\ \varphi(1,1,0) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

Dato che:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix},$$

sappiamo che:

$$\begin{aligned} \varphi(1,0,-1) &= (0,0,0) \\ \varphi(1,0,0) &= (1,1,0) \\ \varphi(1,1,0) &= (1,h+1,h). \end{aligned}$$

Quindi, vogliamo che sia:

$$\begin{cases} (h+1,1,0) = (1,1,0) \\ (1,h+1,h) = (1,1,0) \end{cases}$$

e questo vuol dire che $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che:

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = T^2(1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 2$ e $m_1 = 1$. È immediato verificare che $V_0 = \operatorname{Ker}\psi = \mathscr{L}\left((1,0,0),(0,1,-1)\right)$ e che $V_1 = \mathscr{L}\left((0,0,1)\right)$. Dunque, possiamo dire che $P^{-1}M(\psi)P = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $P = (0,1,0)$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} 2x + 2y - z + 7 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Determinare la retta s passante per P e parallela a r, il piano π passante per P e ortogonale a r e la distanza $d(s,r)$.

2. Studiare le quadriche di equazione:

$$hx^2 + y^2 - 2hxz - 4hx + 2y + 2 - h = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

soluzione

1. Dato che la retta r ha parametri direttori $(1,-3,-4)$ abbiamo:

$$s\colon x = -\frac{y-1}{3} = -\frac{z}{4} \Rightarrow s\colon \begin{cases} 4x + z = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

e $\pi\colon x - 3y - 4z + 3 = 0$. Determiniamo:

$$H = \pi \cap r\colon \begin{cases} x - 3y - 4z + 3 = 0 \\ 2x + 2y - z + 7 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H = (-2,-1,1).$$

Dunque:

$$d(s,r) = \overline{PH} = 3.$$

2. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & 0 & -h & -2h \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -h & 0 & 0 & 0 \\ -2h & 1 & 0 & 2-h \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} h & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = h^2(h-1)$ e $|A| = -h^2$. Si vede che per $h = 0$ abbiamo $|B| = 0$, $|A| = 0$ e $\rho(B) = 2$, per cui in tal caso la quadrica è spezzata. Per $h = 1$abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui in tal caso abbiamo un cono.

Sia $h \neq 0, 1$. Dato che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & -h \\ 0 & 1-T & 0 \\ -h & 0 & -T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - hT - h^2),$$

vediamo che A non avrà mai autovalori concordi, per cui le quadriche per $h \neq 0, 1$ sono tutte iperboloidi. Quindi, per $h > 1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h < 1$, $h \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi ellittici.