Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 13 Luglio 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 4

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ le basi $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, dove $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ e $w_1 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,0,1,1)$, $w_3 = (0,1,0,0)$ e $w_4 = (1,1,1,0)$, e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & h & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare $f^{-1}(w_2 + hw_3 + (1-2h)w_4)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Dato $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, studiare la semplicità dell'endomorfismo $g\colon V \to V$ tale che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= 2v_1 - hv_2 + 2v_3 \\ g(v_2) &= 4v_1 + 2v_2 \\ g(v_3) &= -2v_1 + hv_2 - 2v_3 \end{aligned}$$

nei casi $h = 0$ e $h = -2$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. Dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} h & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & h \\ -1 & h & 0 & 0 & 1-2h \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} h & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2-h & -1 & 0 & 0 & h \\ -h^2+2h-1 & 0 & 0 & 0 & h^2-2h+1 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 1$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} ha + 2b + c + d = 0 \\ -a + b + c = 1 \\ (2-h)a - b = h \\ (-h^2+2h-1)a = h^2 - 2h + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 2 \\ d = h+2 \end{cases}$$

per cui per $h \neq 1$

$$f^{-1}(w_2 + hw_3 + (1-2h)w_4) = \{-v_1 - 2v_2 + 2v_3 + (h+2)v_4\} = \{(-1,-1,-2,h+2)\}.$$

Sia $h = 1$. In tal caso, la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} a+2b+c+d=0 \\ -a+b+c=1 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=2 \\ d=-3b-3. \end{cases}$$

Dunque, per $h=1$:

$$f^{-1}(w_2+w_3-w_4)=\{(b+1)v_1+bv_2+2v_3+(-3b-3)v_4\in\mathbb{R}^4\}=\{(b+1,2b+3,b,-3b-3)\in\mathbb{R}^4\}.$$

2. La matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{C}=[v_1,v_2,v_3]$ di V è:

$$M^{\mathcal{C}}(g)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -h & 2 & h \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sia $h=0$. In tal caso:

$$P(T)=\begin{vmatrix} 2-T & 4 & -2 \\ 0 & 2-T & 0 \\ 2 & 0 & -2-T \end{vmatrix}=(2-T)T^2,$$

per cui gli autovalori sono 0 e 2 con $m_0=2$ e $m_2=1$. g è semplice se $\dim V_0=m_0=2$, dove $V_0=\operatorname{Ker} g$. Dato che:

$$M^{\mathcal{C}}(g)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\dim V_0=1<2=m_0$, per cui per $h=0$ g non è semplice.
Sia $h=-2$. In tal caso:

$$P(T)=\begin{vmatrix} 2-T & 4 & -2 \\ 2 & 2-T & -2 \\ 2 & 0 & -2-T \end{vmatrix}=-T(-2-T)(4-T),$$

per cui gli autovalori sono 0, -2 e 4, tutti di molteplicità algebrica 1. Ciò vuol dire che g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori.
Sappiamo che $V_0=\operatorname{Ker} g$ e:

$$M^{\mathcal{C}}(g)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_0=\{v\in V \mid [v]_{\mathcal{C}}=(a,b,c),\ 2a+4b-2c=0,\ -2b=0\}=\mathscr{L}(v_1+v_3)=\mathscr{L}\left((1,2,0,0)\right).$$

Sappiamo che $V_{-2}=\operatorname{Ker} g_{-2}$, $g_{-2}=g+2i$ e:

$$M^{\mathcal{C}}(g_{-2})=M^{\mathcal{C}}(g)+2I=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_{-2}=\{v\in V \mid [v]_{\mathcal{C}}=(a,b,c),\ 4a+4b-2c=0,\ -2a=0\}=\mathscr{L}(v_2+2v_3)=\mathscr{L}\left((0,3,1,0)\right).$$

Sappiamo che $V_4 = \operatorname{Ker} g_4$, $g_4 = g - 4i$ e:

$$M^{\mathcal{C}}(g_4) = M^{\mathcal{C}}(g) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_4 = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{C}} = (a, b, c),\ -2a + 4b - 2c = 0,\ 2b - 4c = 0\} = \mathscr{L}(3v_1 + 2v_2 + v_3) = \mathscr{L}\left((3, 6, 2, 0)\right).$$

Quindi, per $h = -2$ una base di autovettori è $[(1, 2, 0, 0), (0, 3, 1, 0), (3, 6, 2, 0)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, -1)$ e $D = (1, -1)$.

2. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

e i punti $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, 1, 1)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$.

Soluzione

1. Le coniche spezzate del fascio sono $AB \cup CD\colon (x + y - 1)(y + 1) = 0$, $AC \cup BD\colon (x - y - 1)(2x + y - 1) = 0$ e $AD \cup BC\colon x(x - 1) = 0$. Usiamo due di queste coniche per scrivere l'equazione del fascio:

$$(x + y - 1)(y + 1) + hx(x - 1) = 0 \Rightarrow hx^2 + xy + y^2 + (1 - h)x - 1 = 0.$$

Dato che:

$$|B| = \begin{vmatrix} h & \frac{1}{2} & \frac{1-h}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1-h}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2 + 2h}{4},$$

le coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = 0$, caso in cui si ottiene $AB \cup CD$, e per $h = -2$, caso in cui necessariamente si ottiene $AC \cup BD$. Per $h \neq 0, -2$ le coniche sono tutte irriducibili. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} h & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = h - \frac{1}{4}$$

vediamo che per $h > \frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{1}{4}$, $h \neq 0, -2$, abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h = -1$.

2. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Imponendo il passaggio per i tre punti dati otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ d = 1 - c, \end{cases}$$

per cui le quadriche date hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 + z(-x - y + cz + 1 - c) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - xz - yz + cz^2 + (1 - c)z - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c & \frac{1-c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-c}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = \frac{-c^2-2c+1}{4}$ e $|A| = c - \frac{1}{2}$. Quindi, per $c = -1 \pm \sqrt{2}$ abbiamo due coni, per $c = \frac{1}{2}$ un paraboloide ellittico e per $c \neq -1, -1 \pm \sqrt{2}$ abbiamo ellissoidi o iperboloidi.

Dato che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-T & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c-T \end{vmatrix} = (1-T)\left[T^2 - (c+1)T + c - \frac{1}{2}\right],$$

vediamo subito che gli autovalori sono concordi per $c > \frac{1}{2}$, mentre sono discordi per $c < \frac{1}{2}$. Quindi, per $c < -1 - \sqrt{2}$ abbiamo iperboloidi ellittici, per $-1 - \sqrt{2} < c < -1 + \sqrt{2}$ abbiamo iperboloidi iperbolici, per $-1 + \sqrt{2} < c < \frac{1}{2}$ abbiamo degli iperboloidi ellittici e per $c > \frac{1}{2}$ abbiamo degli ellissoidi reali.