Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 13 Luglio 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 3

I

Sono assegnati il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ avente $\mathscr{A} = [(1,1,0),(0,1,-1)]$ come base e l'endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ tale che:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & h \end{pmatrix}$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui restrizione a $f|_V$ induce φ e tale che $(1,1,1) \in V_2$. Calcolare $f^{-1}(1,0,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Diagonalizzare, ove possibile, la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & h-1 & 1 \\ 0 & 1 & h & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dalle condizioni date segue che deve essere:

$$\begin{cases} f(1,1,0) = \varphi(1,1,0) = (1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1) \\ f(0,1,-1) = \varphi(0,1,-1) = (0,h,-h) \\ f(1,1,1) = (2,2,2). \end{cases}$$

Inoltre, dato che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$\mathscr{B} = [(1,1,0),(0,1,-1),(1,1,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si ha:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo e $f^{-1}(1,0,1)$ è certamente non vuoto e costituito da un solo elemento. Per come è definito f deve necessariamente essere:

$$f^{-1}(1,0,1) = \{(1,1,0)\}$$

per $h \neq 0$. Per $h = 0$, dato che $[(1,0,1)]_{\mathscr{B}} = (1,-1,0)$, occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

per cui per $h = 0$:

$$f^{-1}(1,0,1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (1,b,0)\} = \{(1,1,0) + b(0,1,-1) \in \mathbb{R}^3\} = \{(1,b+1,-b) \in \mathbb{R}^3\}.$$

2. Dato che:

$$\begin{vmatrix} 1-T & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-T & h-1 & 1 \\ 0 & 1 & h-T & h \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2[T^2-(h+2)T+h+1] = (1-T)^3(h+1-T),$$

vediamo che per $h \neq 0$ gli autovalori sono 1 e $h+1$, con $m_1 = 3$ e $m_{h+1} = 1$, mentre per $h = 0$ l'unico autovalore è 1 con $m_1 = 4$.

Andiamo a verificare il valore di $\dim V_1$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Dato che:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che per $h \neq 1$ certamente si ha $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < m_1$, il che implica che per $h \neq 1$ A non è diagonalizzabile.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_1 = 4 - 1 = 3 = m_1$ e A è diagonalizzabile. Inoltre:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + t = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,0)\right)$$

e, dato che:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo anche:

$$V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y + t = 0,\ t = 0,\ y - z = 0\} = \mathscr{L}\left((1,1,1,0)\right).$$

Quindi, possiamo concludere che per $h = 0$ si ha $P^{-1}AP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (0, 0, -2)$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

determinare la retta s ortogonale e incidente la retta r e passante per P. Determinare $d(P, r)$.

2. Studiare la quadrica di equazione:

$$Q\colon x^2 - 2xy + z^2 + 2z + 1 = 0,$$

determinando la natura della conica sezione di Q con il piano $\alpha\colon x - z = 0$.

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1, 2, 3)$, per cui il piano π ortogonale a r e passante per P ha equazione $\pi\colon x + 2y + 3z + 6 = 0$. Determiniamo:

$$H = \pi \cap r\colon \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + 2y + 3z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right).$$

Quindi:

$$s\colon \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-\frac{3}{2}+2} \Rightarrow s\colon \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

e

$$d(P, r) = \overline{PH} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Le matrici associate alla quadrica sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 0$ e $|A| = -1 \neq 0$, la quadrica Q è un cono il cui vertice è dato da:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow V = (0, 0, -1).$$

Dato che $V \notin \pi$, la conica $\Gamma = Q \cap \pi$ è irriducibile. Per determinare la sua natura dobbiamo trovarne i punti impropri:

$$\Gamma \cap \pi_\infty\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + z^2 + 2zt + t^2 = 0 \\ x = z \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z^2 - 2yz = 0 \\ x = z \\ t = 0. \end{cases}$$

È evidente che la conica Γ ha due punti impropri reali e distinti, per cui essa è un'iperbole.