Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 13 Luglio 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 2

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z,t) = (2x - y + z - t, hx - y + 2z + (-h-1)t, x - y + ht, -x + y + t),$$

per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ e $h \in \mathbb{R}$.

1. Dato $U = \mathscr{L}\left((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\right)$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\mathscr{A} = [(2,2,1,h+2),(2,0,2,-h),(0,2,-1,0)]$ è una base di $f^{-1}(U)$.

2. Dato $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$g(x,y,z,t) = (x + y + z + 2t, x - z + t, x - z + t, z + t)$$

per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, studiare la semplicità di $\varphi = g \circ f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - z + t = 0$$

segue che $\dim U = 3$ e che $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z + t = 0\}$. Dunque:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) \in U\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (2x - y + z - t, hx - y + 2z + (-h-1)t, x - y + ht, -x + y + t) \in U\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h-2)x + y + 2z - 2ht = 0\}. \end{aligned}$$

Osserviamo, ora, che:

$$\begin{aligned} &(2,2,1,h+2) \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow -2h^2 - 2h = 0 \\ &(2,0,2,-h) \in f^{-1}(U) \Leftrightarrow 2h^2 + 2h = 0 \\ &(0,2,-1,0) \in f^{-1}(U). \end{aligned}$$

Dunque, $(2,2,1,h+2),(2,0,2,-h),(0,2,-1,0) \in f^{-1}(U)$ se $2h^2 + 2h = 0$, cioè per $h = 0$ e $h = -2$. I tre vettori individuano una base di $f^{-1}(U)$ se sono linearmente indipendenti, in quanto chiaramente si ha $\dim f^{-1}(U) = 3$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Sia $h = 0$. In tal caso, i vettori sono $(2,2,1,2),(2,0,2,0),(0,2,-1,0)$ e da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che essi sono linearmente indipendenti, per cui per $h = 0$ i tre vettori dati individuano una base di $f^{-1}(U)$.

Sia $h = -1$. In tal caso, i vettori sono $(2,2,1,1)$, $(2,0,2,1)$, $(0,2,-1,0)$ e da:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che essi sono linearmente dipendenti e, perciò, per $h = -1$ i tre vettori non individuano una base di $f^{-1}(U)$.

2. Si vede che:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ h & -1 & 2 & -h-1 \\ 1 & -1 & 0 & h \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h+1-T & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 & -h \\ 0 & 1 & 1-T & -h \\ 0 & 0 & 0 & h+1-T \end{vmatrix} = (h+1-T)^2(T^2-2T).$$

Dunque, per $h \neq 1, -1$ gli autovalori sono $h+1$, 0 e 2, con $m_0 = m_2 = 1$ e $m_{h+1} = 2$. Per $h = 1$ gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 1$ e $m_2 = 3$. Per $h = -1$ gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 3$ e $m_2 = 1$.

Calcoliamo $\dim V_{h+1}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $V_{h+1} = \operatorname{Ker} \varphi_{h+1}$, dove $\varphi_{h+1} = \varphi - (h+1)i$ e:

$$M(\varphi_{h+1}) = M(\varphi) - (h+1)I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -h & 1 & -h \\ 0 & 1 & -h & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -h & 1 & -h \\ 1 & -h & -h \end{vmatrix} = -2h^2 - 2h$$

e che questo è l'unico minore di ordine 3 che può essere non nullo, possiamo dire che per $h \neq 0, -1$ si ha $\rho(M(\varphi_{h+1})) = 3$, mentre per $h = 0$ e $h = -1$ si ha $\rho(M(\varphi_{h+1})) \leq 2$. Quindi, per $h \neq 0, -1$ si ha $\dim V_{h+1} = 1 < m_{h+1}$ e ciò vuol dire che per $h \neq 0, -1$ φ non è certamente semplice.

Sia $h = -1$. In tal caso gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 3$ e $m_2 = 1$ e si ha:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_0 = 4 - 2 = 2 < 3 = m_0$ e anche nel caso $h = -1$ φ non è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso gli autovalori sono 1, 0 e 2, con $m_0 = 1$, $m_2 = 1$ e $m_1 = 2$. Da:

$$M(\varphi_1) = M(\varphi) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$ e per $h = 0$ φ è semplice. Inoltre:

$$V_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0,0),(0,0,0,1)\right).$$

Da:

$$M(\varphi_2) = M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x - y + 3z = 0,\ -y + z = 0,\ -t = 0\} = \mathscr{L}\left((2, 1, 1, 0)\right).$$

Da:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 3z = 0,\ y + z = 0,\ t = 0\} = \mathscr{L}\left((4, 1, -1, 0)\right).$$

Quindi, per $h = 0$ una base di autovettori è $[(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 1, 1, 0), (4, 1, -1, 0)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (1, 0, 1)$, il piano $\pi\colon\ x + y + 2z = 0$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z - 2 = 0, \end{cases}$$

determinare il piano α parallelo a r, ortogonale a π e passante per P. Determinare $d(r, \alpha)$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$hx^2 - 2xy + (-h - 3)y^2 + 2x + 2y = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

Soluzione

1. Dato che $(1, 4, 3)$ sono parametri direttori della retta r, le componenti (a, b, c) di un vettore ortogonale al piano α cercato sono tali che:

$$\begin{cases} a + 4b + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5b \\ c = -3b. \end{cases}$$

Quindi, possiamo considerare il vettore di componenti $(5, 1, -3)$ ortogonale ad α e abbiamo:

$$\alpha\colon 5(x - 1) + y - 3(z - 1) = 0 \Rightarrow \alpha\colon 5x + y - 3z - 2 = 0.$$

Dato che:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}z + 1 \\ y = \dfrac{4}{3}z, \end{cases}$$

possiamo prendere il punto $Q = (1, 0, 0) \in r$ e:

$$d(r, \alpha) = d(Q, \alpha) = \frac{|5 - 2|}{\sqrt{25 + 1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{35}}.$$

2. La conica nascosta ha equazione $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$, per cui essa è spezzata. Da:

$$B = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ -1 & -h-3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $|B| = 1 \neq 0$, per cui l'unica conica spezzata del fascio è quella nascosta. Determiniamo i punti base del fascio intersecando due coniche qualsiasi:

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ -2xy - 3y^2 + 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

per cui essi sono $(0,0)$ contato 3 volte e $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$. Inoltre, essendo $|A| = -h^2 - 3h - 1$, concludiamo che per $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} < h < \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle parabole; per $h < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $h > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.