Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr), Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 13 Luglio 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito 1

I

1. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & h & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
diagonalizzare A, se possibile, nei casi $h = 0$ e $h = 5$.

2. Posto $h = 6$ e data la base $\mathscr{B} = [(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)]$ di $\mathbb{R}^3$, sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $A = M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f)$. Determinare $M(f)$ e calcolare la somma $f(U) + U$, dove $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$, specificando se la somma è diretta o meno.

Soluzione

1. Sia $h = 0$. Dunque:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 3 & -1 \\ -3 & -T & -1 \\ -3 & 3 & 1-T \end{vmatrix} = -(T-2)(T^2+2T+12),$$
per cui il polinomio caratteristico ha una sola soluzione reale e due immaginarie. Ciò vuol dire che per $h = 0$ A non è diagonalizzabile.
Sia $h = 5$. Dunque:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 3 & -1 \\ -3 & 5-T & -1 \\ -3 & 3 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T-2)^2,$$
per cui gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che necessariamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$, per cui A è diagonalizzabile se $\dim V_2 = m_2$.
Sia $T = 2$. Dato che:
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
possiamo dire che $\dim V_2 = 3 - \rho(A-2I) = 2 = m_2$, per cui A è diagonalizzabile e:
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 3y - z = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,-3),(0,1,3)\right).$$
Sia $T = 1$. Da:
$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + 3y - z = 0,\ -x + y = 0\} = \mathscr{L}\left((1,1,1)\right).$$

Quindi, possiamo dire che $P^{-1}AP = D$, dove:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sappiamo che:

$$M^{\mathscr{B},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui si ha:

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (-1,-3,-3) \\ f(0,1,1) = (3,6,3) \\ f(0,1,0) = (-1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (0,-2,-4) \\ f(e_2) = (-1,-1,1) \\ f(e_3) = (4,7,2), \end{cases}$$

da cui:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che:

$$U = \{(x, y, -2x + y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}\left((1,0,-2),(0,1,1)\right),$$

sappiamo che:

$$f(U) = \mathscr{L}(f(1,0,-2), f(0,1,1)) = \mathscr{L}(f(1,0,-2),(3,6,3)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

segue che $f(1,0,2) = (-8,-16,-8)$, per cui:

$$f(U) = \mathscr{L}\left((-8,-16,-8),(3,6,3)\right) = \mathscr{L}\left((-8,-16,-8)\right) = \mathscr{L}\left((1,2,1)\right),$$

dato che $(-8,-16,-8) = -8(1,2,1)$ e $(3,6,3) = 3(1,2,1)$. In particolar modo, osserviamo che $\dim f(U) = 1$, mentre $\dim U = 2$ e, inoltre, $(1,2,1) \notin U$, per cui $U \cap f(U) = \{(0,0,0)\}$. Ciò vuol dire che $f(U) + U$ è diretta e da:

$$\dim(f(U) \oplus U) = \dim f(U) + \dim U = 1 + 2 = 3$$

segue che $f(U) \oplus U = \mathbb{R}^3$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + (2h-2)xy + y^2 - 4h - 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. Determinare e studiare la quadrica contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } s\colon \begin{cases} x = -1 \\ y = z. \end{cases}$$

Soluzione

1. Per $h = \infty$ otteniamo la conica di equazione $xy - 2 = 0$, che è un'iperbole equilatera. Poi, dato che:
$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & h-1 & 0 \\ h-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4h-1 \end{vmatrix} = (-4h-1)(-h^2+2h)$$
vediamo che le coniche irriducibili del fascio si ottengono per $h = 0$, caso in cui abbiamo $(x-y-1)(x-y+1) = 0$, per $h = 2$, caso in cui abbiamo $(x+y+3)(x+y-3) = 0$, e per $h = -\frac{1}{4}$, caso in cui abbiamo $(2x-y)(x-2y) = 0$. Per $h \neq 0, 2, -\frac{1}{4}$ abbiamo coniche irriducibili.
Troviamo i punti base intersecando due coniche qualsiasi del fascio:
$$\begin{cases} (x-2y)(2x-y) = 0 \\ (x+y+3)(x+y-3) = 0, \end{cases}$$
per cui essi sono $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ e $(-1,-2)$.
Infine, dato che $|A| = -h^2 + 2h$, possiamo dire che per $0 < h < 2$ abbiamo delle ellissi reali, tra le quali figura una circonferenza per $h = 1$; non ci sono parabole nel fascio in quanto per $h = 0$ e $h = 2$ abbiamo due coniche spezzate; per $h < 0$, $h \neq -\frac{1}{4}$, e $h > 2$ abbiamo delle iperboli e l'unica iperbole equilatera del fascio è la conica nascosta.

2. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:
$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$
Da:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2 + (a+d)z = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$
vediamo che la retta è contenuta nella quadrica se $c = a + d = 0$. Da:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = -1 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b+c+3)z^2 + (-a+d+2)z = 0 \\ x = -1 \\ y = z \end{cases}$$
vediamo che la retta è contenuta nella quadrica se $b + c + 3 = -a + d + 2 = 0$. Dunque, la quadrica cercata è tale che:
$$\begin{cases} c = 0 \\ a + d = 0 \\ b + c + 3 = 0 \\ -a + d + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = -1, \end{cases}$$
per cui essa ha equazione:
$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 + z(x - 3y - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + 3y^2 + xz - 3yz - z - 1 = 0.$$
Le matrici associate sono:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$
per cui $|B| = 1 > 0$ e $|A| = \dfrac{3}{2} \neq 0$. Ciò vuol dire che la quadrica è un iperboloide iperbolico o un ellissoide immaginario. Dato che contiene punti reali deve necessariamente essere un iperboloide iperbolico.