Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr), Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 11 Settembre 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0)$, la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $\mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h+1)v_1 + v_2 - hv_3 \\ f(v_2) &= hv_2 + hv_3 \\ f(v_3) &= 4v_2 + (h+1)v_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $v = (h+1)v_1 + 2v_2 + 3v_3 \notin \operatorname{Im} f$.
2. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $4v_2 + v_3$ è autovettore per f e, per tale valore di h, diagonalizzare $M^{\mathscr{A}}(f)$.

Soluzione

1. Osserviamo che:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 4 \\ -h & h & h+1 \end{pmatrix},$$
per cui $|M^{\mathscr{A}}(f)| = (h+1)(h^2 - 3h)$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1, 3$ f è un isomorfismo. In particolare, ciò significa che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ per $h \neq 0, -1, 3$. In questi casi, deve necessariamente accadere che $v \in \operatorname{Im} f$.

   Sia $h = 0$. Dire che $v \in \operatorname{Im} f$ implica che il sistema avente questa matrice associata ha soluzioni:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} \end{array}\right).$$
Dato che il sistema è impossibile per $h = 0$ si ha $v \notin \operatorname{Im} f$.

   Sia $h = -1$. Dire che $v \in \operatorname{Im} f$ implica che il sistema avente questa matrice associata ha soluzioni:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$
Dato che il sistema è possibile per $h = -1$ si ha $v \in \operatorname{Im} f$.

   Sia $h = 3$. Dire che $v \in \operatorname{Im} f$ implica che il sistema avente questa matrice associata ha soluzioni:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$
Dato che il sistema è impossibile per $h = 3$ si ha $v \notin \operatorname{Im} f$. Quindi, i valori cercati sono $h = 0$ e $h = 3$.

2. Da:
$$M^{\mathscr{A}}(f)\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h+1&0&0\\1&h&4\\-h&h&h+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4h+4\\5h+1\end{pmatrix}$$
vediamo che $f(4v_2+v_3)=(4h+4)v_2+(5h+1)v_3$. Essendo $4v_2+v_3=(4,5,0)$, abbiamo:
$$f(4,5,0)=(4h+4,9h+5,0)$$
e $4v_2+v_3$ è autovettore se la seguente matrice ha rango 1:
$$\begin{pmatrix}4&5&0\\4h+4&9h+5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}4&5&0\\0&4h&0\end{pmatrix}.$$
Quindi, $4v_2+v_3$ è autovettore per f per $h=0$. Dunque, ora dobbiamo diagonalizzare la matrice:
$$B=M^{\mathcal{A}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&4\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Chiamiamo $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $M(g)=B$. Si ha:
$$P(T)=\begin{vmatrix}1-T&0&0\\1&-T&4\\0&0&1-T\end{vmatrix}=-T(1-T)^2.$$
Gli autovalori sono $T=0,1$ con $m_0=1$ e $m_1=2$. L'endomorfismo g è semplice e, di conseguenza, la matrice Bè diagonalizzabile se $\dim V_1=m_1=2$. Sappiamo che $V_1=\operatorname{Ker}g_1$, dove $g_1=g-i$ e:
$$M(g_1)=M(g)-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&4\\0&0&0\end{pmatrix},$$
per cui $\dim V_1=3-\rho(M(g_1))=2=m_1$ e B è diagonalizzabile. Inoltre:
$$V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+4z=0\}=\{(x,x+4z,z)\in\mathbb{R}^3\}=\mathscr{L}((1,1,0),(0,4,1)).$$
Sappiamo che $V_0=\operatorname{Ker}g=\mathscr{L}((0,1,0))$, in quanto si ha necessariamente $\dim V_0=m_0=1$ e $(0,1,0)\in\operatorname{Ker}g$, essendo la seconda colonna di B tutta nulla. Quindi, una base di autovettori per g è $[(1,1,0),(0,4,1),(0,1,0)]$, la matrice B è simile alla matrice diagonale:
$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
e $D=P^{-1}BP$, dove:
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&4&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1. Dati il punto $P=(1,0,0)$ e la retta
$$r\colon\begin{cases}x-y+z=2\\x+2y-z=-2,\end{cases}$$
determinare il piano π passante per P e ortogonale a r e il punto P' simmetrico di P rispetto a r.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (0, 1)$ ed ivi tangenti alle rette $s_1: x - 1 = 0$ e $s_2: y - 1 = 0$. Determinare la natura della conica del fascio passante per il punto improprio $P_\infty = (1, -1, 0)$.

Soluzione

1. Si vede facilmente che la retta r ha parametri direttori $(1, -2, -3)$, per cui $\pi: x - 2y - 3z - 1 = 0$. Determiniamo il punto:

$$H = \pi \cap r: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -1 \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, $H = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ e il simmetrico $P' = (a, b, c)$ di $P = (1, 0, 0)$ rispetto ad H è tale che:

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{2} = -1 \\ \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 1. \end{cases}$$

Quindi, il simmetrico di P rispetto a r è il punto $P' = (0, -2, 1)$.

2. Dal momento che $AB: x - y + 1 = 0$, le uniche coniche spezzate del fascio hanno equazioni $(x - 1)(y - 1) = 0$ e $(x - y + 1)^2 = 0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x-1)(y-1) + (x - y + 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (h-2)xy + (2-h)x - (h+2)y + h + 1 = 0.$$

Come detto, le uniche coniche spezzate del fascio, sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Ciò significa che per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo la conica spezzata $(x - y + 1)^2 = 0$. Possiamo, dunque, passare a classificare le coniche del fascio. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 4h}{4}$$

vediamo che per $h = 4$ abbiamo l'unica parabola del fascio, mentre per $h = 0$ la conica è spezzata; per $0 < h < 4$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali figura una circonferenza per $h = 2$; per $h < 0$ e $h > 4$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

Cerchiamo la conica del fascio passante per $P_\infty = (1, -1, 0)$, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio scritta in coordinate omogenee:

$$x^2 + y^2 + (h-2)xy + (2-h)xt - (h+2)yt + (h+1)t^2 = 0 \Rightarrow 1 + 1 - h + 2 = 0 \Rightarrow h = 4.$$

La conica del fascio cercata, in base alla classificazione precedente, è una parabola.