Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 9 Settembre 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y - t = 0,\ y - z = 0\}$ e $W = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, h, -1))$.

1. Calcolare $V + W$ e $V \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se la somma è diretta o meno.
2. È dato al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:
$$\begin{aligned} f(1, 1, 0, 0) &= (h + 1, 1, h - 1, 2h + 2) \\ f(1, 0, 1, 0) &= (2, h - 1, 1, 1) \\ f(1, 1, 1, 0) &= (h + 2, h, h, 2h + 2) \\ f(0, 0, 1, 1) &= (2, h - 1, 1, 1). \end{aligned}$$
Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$. Studiare la semplicità di g.

Soluzione

1. È semplice vedere che $\dim V = \dim W = 2$. Inoltre, essendo $V = \mathscr{L}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, -3))$ e $W = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, h, -1))$, si ha:
$$V + W = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, h, -1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, -3)).$$
Da:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambiando } R_2 \text{ e } R_3 \text{ e riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo che per $h \neq 1$ $\dim(V + W) = 4$ e, essendo $V + W \subseteq \mathbb{R}^4$, si ha $V + W = \mathbb{R}^4$. In tal caso, inoltre si ha:
$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 4 - 4 = 0,$$
per cui $V \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e la somma per $h \neq 1$ è diretta.
Sia $h = 1$. In tal caso, dalla riduzione vediamo che $\dim(V + W) = 3$ e che una base di $V + W$ è $[(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)]$. Inoltre:
$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 4 - 3 = 1,$$

per cui per $h = 1$ la somma non è diretta. Per calcolare $V \cap W$ cerchiamo le equazioni cartesiane di W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & y+t & z+t & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + t = z + t = 0\}$. Dunque:

$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y - t = 0,\ y - z = 0,\ y + t = 0,\ z + t = 0\}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y - t = 0,\ y - z = 0,\ y + t = 0\} = \mathscr{L}\left((2, 1, 1, -1)\right).$$

2. Dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (h+1, 1, h-1, 2h+2) \\ f(e_1) + f(e_3) = (2, h-1, 1, 1) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+2, h, h, 2h+2) \\ f(e_3) + f(e_4) = (2, h-1, 1, 1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1, 0, 0, 1) \\ f(e_2) = (h, 1, h-1, 2h+1) \\ f(e_3) = (1, h-1, 1, 0) \\ f(e_4) = (1, 0, 0, 1), \end{cases}$$

per cui:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2h+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Date che la prima e l'ultima colonna sono uguali, è chiaro che $|M(f)| = 0$. Riduciamo la matrice per calcolarne il rango:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2h+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando } R_3 \text{ e } R_4\text{, con } h \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & -h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(1, 0, 0, 1), (h, 1, h-1, 2h+1), (1, h-1, 1, 0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + hy + z + t = 0,\ y + (h-1)z = 0,\ -h^2 z = 0\} = \mathscr{L}\left((1, 0, 0, -1)\right).$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h = 0$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0,\ y - z = 0\} = \mathscr{L}\left((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, -1)\right).$$

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h & 1 & 1 \\ 0 & 1-T & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1-T & 0 \\ 1 & 2h+1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)\begin{vmatrix} 1-T & h-1 & 0 \\ h-1 & 1-T & 0 \\ 2h+1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h & 1 & 1 \\ 1-T & h-1 & 0 \\ h-1 & 1-T & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-T)^2 \begin{vmatrix} 1-T & h-1 \\ h-1 & 1-T \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-T & h-1 \\ h-1 & 1-T \end{vmatrix} = [(1-T)^2 - 1][(1-T)^2 - (h-1)^2],$$

per cui gli autovalori sono $0, 2, h, 2-h$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 1, 2$, per cui per $h \neq 0, 1, 2$ f è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 2$. f è semplice si se ha contemporaneamente $\dim V_0 = m_0 = 2$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e che, per quanto visto nello studio di f, $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2 = m_0$. A questo punto, per verificare se f è semplice o meno occorre solo vedere se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_2)) = 2$ e $\dim V_2 = 4 - \rho(M(f_2)) = 4 - 2 = 2 = m_2$. Ciò vuol dire che per $h = 0$ f è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono $0, 1, 2$, con $m_0 = 1$, $m_2 = 1$ e $m_1 = 2$. f è semplice si se ha contemporaneamente $\dim V_0 = m_0 = 1$, $\dim V_2 = m_2 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$. Necessariamente deve essere $\dim V_0 = m_0 = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 4 - \rho(M(f_1)) = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che per $h = 1$ f è semplice.

Sia $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 2$. f è semplice si se ha contemporaneamente $\dim V_0 = m_0 = 2$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e che, per quanto visto nello studio di f, $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 1 < 2 = m_0$. Dunque, per $h = 2$ f non è semplice.

4. Dato che $V = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,1,-3))$, si ha $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,0,1), f(0,1,1,-3))$. Da:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2h+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2h+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-2 \\ h \\ h \\ 2h-2 \end{pmatrix}$$

vediamo che $f(1,0,0,1) = (2,0,0,2)$ e $f(0,1,1,-3) = (h-2, h, h, 2h-2)$. Dunque:

$$f(V) = \mathscr{L}((2,0,0,2),(h-2,h,h,2h-2)).$$

La restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ se $f(V) \subseteq V$. È chiaro che $(2,0,0,2) \in V$ e che $(h-2, h, h, 2h-2) \in V$ per $h = 0$. Dunque, per tale valore di h abbiamo un endomorfismo $g\colon V \to V$ tale che:

$$\begin{aligned} g(1,0,0,1) &= f(1,0,0,1) = (2,0,0,2) \\ g(0,1,1,-3) &= f(0,1,1,-3) = (-2,0,0,-2). \end{aligned}$$

Dunque, data la base $\mathscr{A} = [(1,0,0,1), (0,1,1,-3)]$ di V, abbiamo che:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È immediato vedere che il polinomio caratteristico in tal caso è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -2 \\ 0 & -T \end{vmatrix} = T(T-2),$$

per cui gli autovalori sono 0 e 2, entrambi di molteplicità algebrica 1, per cui g è certamente semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$
Determinare i piani paralleli alle rette r e s e aventi distanza da r pari a $\sqrt{14}$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazioni:
$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + (2h-4)xy + hy^2 + 2x + 4y = 0, \end{cases}$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il vertice della parabola del fascio.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2xy - 4xz + hy^2 - 4yz - hz^2 + 2z - 1 = 0,$$
determinandone il vertice, ove possibile.

Soluzione

1. Dato che le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(-1,-5,3)$ e $(-1,4,-3)$, i piani cercati sono ortogonali a un vettore di componenti (a,b,c) tali che:
$$\begin{cases} -a - 5b + 3c = 0 \\ -a + 4b - 3c = 0, \end{cases}$$
per cui è possibile affermare che i piani cercati sono ortogonali a un vettore di componenti $(1,-2,-3)$ ed hanno, perciò, equazione:
$$x - 2y - 3z + k = 0.$$
Prendiamo il punto $A = (-1,0,0) \in r$. Vogliamo che sia:
$$d(A,\pi) = d(r,\pi) = \sqrt{14} \Rightarrow \frac{|-1+k|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$
Dunque, abbiamo $k = 15$ e $k = -13$, per cui i piani cercati sono quelli di equazione:
$$x - 2y - 3z + 15 = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y - 3z - 13 = 0.$$

2. Osserviamo subito che per $h = \infty$ abbiamo la conica di equazione $y(2x+y) = 0$. Le matrici associate al fascio sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h-2 & 1 \\ h-2 & h & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h-2 \\ h-2 & h \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = 3h - 12$, vediamo che per $h \neq 4$ abbiamo coniche irriducibili, mentre per $h = 4$ abbiamo una conica spezzata di equazione:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y = 0 \Rightarrow (x+2y)(x+2y+2) = 0.$$

Cerchiamo i punti base del fascio:

$$\begin{cases} (x+2y)(x+2y+2) = 0 \\ y(2x+y) = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo i punti $(-2,0)$, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ e il punto $(0,0)$ contato due volte. Inoltre, essendo $|A| = -h^2 + 5h - 4$, vediamo che per $h = 1$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 4$ abbiamo una conica spezzata; per $1 < h < 4$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non compaiono circonferenze; per $h < 1$ e $h > 4$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$.

Cerchiamo, ora, il vertice della parabola del fascio. Essa ha equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y = 0.$$

Dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2xt + 4yt = 0 \\ t^2 = 0 \end{cases}$$

vediamo che essa ha un punto improprio di coordinate $(1,1,0)$. Esso è anche il punto improprio dell'asse di simmetria della conica, per cui la retta tangente alla parabola nel vertice ha coefficiente angolare -1 e sarà perciò di equazione $y = -x + k$. Imponiamo che tale retta sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = -x + k \\ x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + k \\ 4x^2 - (4k+2)x + k^2 + 4k = 0. \end{cases}$$

La retta è tangente se:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}.$$

Per tale valore di k il sistema precedente diventa:

$$\begin{cases} y = -x + \dfrac{1}{12} \\ 4x^2 - \dfrac{7}{3}x + \dfrac{49}{144} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{24} \\ y = -\dfrac{5}{24}. \end{cases}$$

Dunque, la parabola ha vertice $V = (\frac{7}{24}, -\frac{5}{24})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & h & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & h & -2 \\ -2 & -2 & -h \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = (h-1)(h+3)$ e $|A| = -(h-1)(h+4)$, vediamo che per $h = -3$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui si ha un cono. Il suo vertice si ottiene risolvendo il sistema associato alla matrice B:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0, \end{cases}$$

per cui il suo vertice è il punto $(2,0,1)$.

Per $h = -4$ abbiamo $|B| > 0$ e $|A| = 0$, per cui abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h = 1$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| = 0$. In quest'ultimo caso, dobbiamo determinare il $\rho(B)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\rho(B) = 3$, concludiamo che per $h = 1$ abbiamo un cilindro, il cui vertice si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice B:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -5z + t = 0 \\ -4z = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo che il vertice è il punto $(1,-1,0,0)$.

Sia $h \neq 1, -3, -4$. In tal caso:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & -2 \\ 1 & h-T & -2 \\ -2 & -2 & -h-T \end{vmatrix} = -T^3 + T^2 + (h^2+9)T - h^2 - 3h + 4,$$

da cui deduciamo immediatamente che per $h < -3$ e $h > 1$, $h \neq -4$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $-3 < h < 1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.