Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Settembre 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnate le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite dalle assegnazioni:

$$f(x,y,z,t) = (x-t, x+y, z+t) \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$$

e

$$\begin{aligned} g(2,1,1) &= (-1,1,1,3) \\ g(1,2,1) &= (0,2,2,3) \\ g(1,-1,1) &= (0,-1,-1,0). \end{aligned}$$

1. Studiare f e g, determinando per ciascuna di esse una base del nucleo e una dell'immagine.
2. Calcolare, al variare del parametro reale h, $g^{-1}(h,-1,h,1)$.
3. Determinare una matrice associata a $f \circ g$ ed una matrice associata a $g \circ f$.
4. Studiare la semplicità di $f \circ g$ e di $g \circ f$ e, nel caso in cui siano semplici, determinare una base di autovettori.

Soluzione

1. La matrice associata a f rispetto alle basi canoniche è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-t=0,\ y+t=0,\ z+t=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,-1,1)\right).$$

Dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{cases} 2g(e_1) + g(e_2) + g(e_3) = (-1,1,1,3) \\ g(e_1) + 2g(e_2) + g(e_3) = (0,2,2,3) \\ g(e_1) - g(e_2) + g(e_3) = (0,-1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(e_1) = (-1,0,0,1) \\ g(e_2) = (0,1,1,1) \\ g(e_3) = (1,0,0,0). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M(g)) = 3$ e una sua base è $[(-1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,0,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 3 = 0.$, per cui $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,0)\}$ e g è iniettiva.

2. Per calcolare $g^{-1}(h,-1,h,1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice associata completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando } R_3 \text{ e } R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq -1$ il sistema è impossibile, per cui $g^{-1}(h,-1,h,1) = \emptyset$. Sia $h = -1$. In tal caso il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} -x+z=-1 \\ y=-1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=1. \end{cases}$$

Dunque, per $h=-1$ abbiamo $g^{-1}(-1,-1,-1,1) = \{(2,-1,1)\}$.

3. Le matrici associate sono:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Il polinomio caratteristico di $f \circ g$ è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -2-T & -1 & 1 \\ -1 & 1-T & 1 \\ 1 & 2 & -T \end{vmatrix} = -T(T^2+T-6) = -T(T-2)(T+3),$$

per cui gli autovalori sono 0, 2 e -3. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui $f \circ g$ è semplice e possiamo cercare una base di autovettori.

Sia $T=0$. Sappiamo che $V_0 = (\ker f \circ g)$. Da:

$$M(f \circ g) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x-y+z=0,\ x+2y=0\} = \mathscr{L}((-2,1,-3)).$$

Sia $T=-3$. Sappiamo che $V_{-3} = (\ker(f \circ g)_{-3})$, dove $(f \circ g)_{-3} = f \circ g + 3i$. Da:

$$M((f \circ g)_{-3}) = M(f \circ g) + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$V_{-3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0,\ 3y+2z=0\} = \mathscr{L}((5,2,-3)).$$

Sia $T=2$. Sappiamo che $V_2 = (\ker(f \circ g)_2)$, dove $(f \circ g)_2 = f \circ g - 2i$. Da:

$$M((f \circ g)_{-3}) = M(f \circ g) - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che:
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4x - y + z = 0,\ 3x = 0\} = \mathscr{L}\left((0,1,1)\right).$$
Dunque, una base di autovettori per $f \circ g$ è $[(-2,1,-3),(5,2,-3),(0,1,1)]$.

Il polinomio caratteristico di $g \circ f$ è:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1-T & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -T & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = T^2(T^2+T-6).$$

In tal caso, gli autovalori sono 0, 2 e -3, con $m_0 = 2$ e $m_2 = m_{-3} = 1$. Dunque, abbiamo che $1 \le \dim V_0 \le 2 = m_0$, mentre necessariamente si ha $\dim V_2 = m_2 = 1$ e $\dim V_{-3} = m_{-3} = 1$. Ciò implica che $g \circ f$ è semplice solo se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Dato che $V_0 = \operatorname{Ker} g \circ f$, abbiamo:
$$M(g \circ f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(g \circ f)) = 3$ e $\dim V_0 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_0$, per cui $g \circ f$ non è semplice e, perciò, non possiamo determinare una base di autovettori per $g \circ f$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati i punti $A = (0,1,1)$, $B = (1,0,-1)$, $C = (1,1,0,0)$ e $D = (0,1,1,0)$. Determinare le equazioni delle rette $r = AC$ e $s = BD$. Verificare che r e s sono complanari, determinare il piano che le contiene e la retta t passante per $P = r \cap s$ e ortogonale a r e s.

2. Assegnata la conica γ del piano $z = 0$ di equazioni:
$$\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x - 10y + 3 = 0, \end{cases}$$
determinarne un'equazione canonica, il centro di simmetria e gli assi di simmetria, indicando l'asse focale.

3. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica di equazioni:
$$\begin{cases} z = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 9y = 0, \end{cases}$$
la retta $r \colon x + y = x + z = 0$ e il punto $R = (0,0,1)$.

Soluzione

1. Osservando che i punti C e D sono impropri, è facile vedere che:
$$r \colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \colon \begin{cases} x = 1 \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

vediamo che r e s sono complanari. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x-y+1)+\mu(z-1)=0.$$

Imponendo il passaggio per B, troviamo $\lambda=\mu$, da cui otteniamo che il piano contenente r e s ha equazione:

$$\pi\colon\ x-y+z=0.$$

Il punto comune a r e s è:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ z=1 \\ x=1 \\ y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1, \end{cases}$$

cioè è il punto $H=(1,2,1)$. La retta t cercata è, chiaramente, ortogonale al piano π che contiene r e s, per cui t ha parametri direttori $(1,-1,1)$. Dunque, essa ha equazioni:

$$t\colon\ x-1=-(y-2)=z-1 \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ x+y-3=0. \end{cases}$$

2. Le matrici associate alla conica data sono:

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \\ -4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

per cui $|B|=-49\neq 0$ e $|A|=14>0$, da cui otteniamo che essa è un'ellisse. La sua forma ridotta è del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$, dove α e β sono gli autovalori di A e dove $-\alpha\beta\gamma=|B|$. Da:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 3-T & 2 \\ 2 & 6-T \end{vmatrix}=T^2-9T+14,$$

vediamo che gli autovalori sono 2 e 7, da cui segue che:

$$-14\gamma=-49 \Rightarrow \gamma=\frac{7}{2}.$$

Prendendo $\alpha=2$ e $\beta=7$, vediamo che una forma ridotta della conica è:

$$2X^2+7Y^2=\frac{7}{2},$$

da cui otteniamo l'equazione canonica:

$$\frac{4}{7}X^2+2Y^2=1.$$

Dunque, siamo nel caso in cui la sua equazione è del tipo $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$, dove $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $a>b$. Calcoliamo facilmente il centro di simmetria:

$$\begin{cases} 3x+2y-4=0 \\ 2x+6y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto $C=(1,\frac{1}{2})$.

Cerchiamo, ora, gli assi di simmetria. L'autospazio associato all'autovalore 2 è determinato da:

$$A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

per cui esso ha equazione $x + 2y = 0$. Un primo asse di simmetria, perciò, ha equazione $x + 2y + k = 0$. Dovendo passare per il centro C, deve essere $k = -2$, per cui il primo asse di simmetria ha equazione $x + 2y - 2 = 0$.

L'autospazio associato all'autovalore 7 è determinato da:

$$A - 7I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui esso ha equazione $2x - y = 0$. L'altro asse di simmetria, perciò, ha equazione $2x - y + k = 0$. Dovendo passare per il centro C, deve essere $k = -\frac{3}{2}$, per cui il secondo asse di simmetria ha equazione $2x - y - \frac{3}{2} = 0$. Per stabilire quale dei due assi è quello focale, determiniamo dei vertici dell'ellisse:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x - 10y + 3 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ 10y^2 - 10y - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo i vertici $V_1 = (\frac{5-\sqrt{35}}{5}, \frac{5+\sqrt{35}}{5})$ e $V_2 = (\frac{5+\sqrt{35}}{5}, \frac{5-\sqrt{35}}{5})$. Da:

$$\overline{V_1V_2} = \sqrt{7} = 2a.$$

e dal fatto che nel nostro caso $a > b$ deduciamo che la retta $x + 2y - 2 = 0$ è l'asse focale. (Osserviamo che l'intersezione della conica con l'altro asse $2x - y - \frac{3}{2} = 0$ dà luogo agli altri due vertici V_3 e V_4, i quali devono essere necessariamente tali che $\overline{V_3V_4} = 2b = \sqrt{2}$).

3. La generica quadrica contenente la conica assegnata ha equazione:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 9y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

L'intersezione della generica quadrica con la retta data è:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 - 9y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = -x \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-a + b + c + 9)x^2 + (9 - d)x = 0 \\ y = -x \\ z = -x. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se:

$$\begin{cases} -a + b + c + 9 = 0 \\ 9 - d = 0. \end{cases}$$

Imponendo, poi, il passaggio per il punto R abbiamo $c + d = 0$. Dunque, devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} -a + b + c + 9 = 0 \\ 9 - d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -9 \\ d = 9 \\ b = a, \end{cases}$$

per cui le quadriche cercate hanno equazione:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + axz + ayz - 9z^2 - 9y + 9z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{a}{2} & 0 \\ -2 & 1 & \frac{a}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -9 & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{a}{2} \\ -2 & 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -9 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = \frac{81(a-12)^2}{16}$ e $|A| = -\frac{9}{4}a^2$ e che le quadriche cercate sono certamente reali, concludiamo subito che per $a = 0$ abbiamo un paraboloide iperbolico, per $a = 12$ abbiamo un cono e per $a \neq 0, 12$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici.