Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 7 Febbraio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 0, 1)$, il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, 2, h+1, 1) \\ f(v_2) &= (1, h+1, 2, h) \\ f(v_3) &= (2, 4h, 4, h+1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $w = (3, 3, 7, 2) \in \operatorname{Im} f$ e per tale valore si calcoli $f^{-1}(w)$.
3. Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z = 0\}$ e posto $h = 1$, si determini l'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$\begin{aligned} \varphi(0, -1, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ \varphi(2, -2, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

   e che W sia l'autospazio $V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Studiare la semplicità di φ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Si determini e si diagonalizzi la matrice associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione

1. Osserviamo subito che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Infatti, la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   è ridotta di rango 3. Ciò vuol dire che $\dim V = 3$ e che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una sua base. Inoltre, dall'assegnazione di f sappiamo che:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 2 \\ 2 & h+1 & 4h \\ h+1 & 2 & 4 \\ 1 & h & h+1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolarne il rango utilizziamo il seguente minore:

$$\begin{vmatrix} h & 1 & 2 \\ 2 & h+1 & 4h \\ h+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(h-1)^2.$$

Deduciamo che, per definizione di rango, per $h \neq 1$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 3$, per cui una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(h,2,h+1,1),(1,h+1,2,h),(2,4h,4,h+1)]$. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,2,2,1))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a+b+2c=0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-b-2c,b,c)\} = \\ = \mathscr{L}(-v_1+v_2,-2v_1+v_3) = \mathscr{L}((0,-1,1,0),(2,-2,0,1)). \end{aligned}$$

2. Per determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $w \in \operatorname{Im} f$ è sufficiente determinare il valore per il quale $f^{-1}(w) \neq \emptyset$. Dunque, occorre risolvere il seguente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 2 & 3 \\ 2 & h+1 & 4h & 3 \\ h+1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & h & h+1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 2 & 3 \\ -h^2-h+2 & 0 & 2h-2 & -3h \\ 1-h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6h \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 1$ $w \in \operatorname{Im} f$ solo per $h = 0$. In tal caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

da cui:

$$\begin{cases} b+2c=3 \\ 2a-2c=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 0$ abbiamo:

$$f^{-1}(w) = \{v_1+v_2+v_3\} = \{(-2,1,1,1)\}.$$

Per $h = 1$, sappiamo che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,2,2,1))$ e in questo caso è evidente che $w \notin \operatorname{Im} f$.

3. Sappiamo che $W = \mathscr{L}((0,1,0,0),(0,0,0,1))$ e che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,-1,1,0),(2,-2,0,1))$. I vettori dati sono linearmente indipendenti, in quanto la seguente matrice è ridotta di rango 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ciò vuol dire che $\mathscr{B} = [(0,-1,1,0),(2,-2,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque, dalle assegnazioni date abbiamo:

$$\begin{aligned} \varphi(0,-1,1,0) &= (0,0,0,0) \\ \varphi(2,-2,0,1) &= (0,0,0,0) \\ \varphi(0,1,0,0) &= (0,\lambda,0,0) \\ \varphi(0,0,0,1) &= (0,0,0,\lambda) \end{aligned}$$

e queste assegnazioni determinano perfettamente l'endomorfismo φ. Inoltre, le assegnazioni

$$\begin{aligned} \varphi(0,-1,1,0) &= (0,0,0,0) = 0 \cdot (0,-1,1,0) \\ \varphi(2,-2,0,1) &= (0,0,0,0) = 0 \cdot (2,-2,0,1) \\ \varphi(0,1,0,0) &= (0,\lambda,0,0) = \lambda \cdot (0,1,0,0) \\ \varphi(0,0,0,1) &= (0,0,0,\lambda) = \lambda \cdot (0,0,0,1) \end{aligned}$$

ci dicono che $\mathscr{B}$ è una base di autovettori per φ, il che vuol dire che φ è sempre semplice.

4. Da:

$$\begin{aligned} \varphi(0,-1,1,0) &= (0,0,0,0) \\ \varphi(2,-2,0,1) &= (0,0,0,0) \\ \varphi(0,1,0,0) &= (0,\lambda,0,0) \\ \varphi(0,0,0,1) &= (0,0,0,\lambda) \end{aligned}$$

abbiamo:

$$\begin{cases} -\varphi(e_2)+\varphi(e_3) = (0,0,0,0) \\ 2\varphi(e_1)-2\varphi(e_2)+\varphi(e_4) = (0,0,0,0) \\ \varphi(e_2) = (0,\lambda,0,0) \\ \varphi(e_4) = (0,0,0,\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(e_1) = \left(0,\lambda,0,-\dfrac{\lambda}{2}\right) \\ \varphi(e_2) = (0,\lambda,0,0) \\ \varphi(e_3) = (0,\lambda,0,0) \\ \varphi(e_4) = (0,0,0,\lambda). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\lambda}{2} & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $\mathscr{B}$ è una base di autovettori per φ, che:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e che $P^{-1}M(\varphi)P = M^{\mathscr{B}}(\varphi)$, dove:

$$P = P^{\mathscr{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare l'equazione del piano α passante per la retta
$$r\colon \begin{cases} x+3=0 \\ y-4=0 \end{cases}$$
e perpendicolare al piano $\beta\colon x+y+1=0$. Determinare la distanza del punto $P=(1,1,2)$ dalla retta $s=\alpha\cap\beta$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ che passano per $O=(0,0,0)$, $A=(1,1,0)$, $B=(2,0,0)$ e che sono tangenti in A alla retta $z=y-1=0$.

3. Data la conica
$$p\colon \begin{cases} x^2-2x+y=0 \\ z=0 \end{cases},$$
determinare e studiare la generica quadrica che contiene p, la retta $x=y=z$ e passa per il punto $Q=(1,0,1)$.

Soluzione

1. I piani contenenti la retta r hanno equazioni $\lambda(x+3)+\mu(y-4)=0 \Rightarrow \lambda x+\mu y+3\lambda-4\mu=0$. Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda,\mu,0)$ e $(1,1,0)$ siano ortogonali, per cui deve essere $\lambda+\mu=0$. Dunque, prendendo $\lambda=1$ e $\mu=-1$ abbiamo $\alpha\colon x-y+7=0$. Dunque:
$$s=\alpha\cap\beta\colon \begin{cases} x-y+7=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=3. \end{cases}$$
Il piano π passante per P e ortogonale a s ha equazione $z=2$, $H=\pi\cap S=(-4,3,2)$ e:
$$d(P,s)=\overline{PH}=\sqrt{29}.$$

2. Sul piano $z=0$ le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $y(y-1)=0$ e $(x-y)(x+y-2)=0$. Dunque, il fascio di coniche cercato ha equazione:
$$hy(y-1)+(x-y)(x+y-2)=0 \Rightarrow x^2+(h-1)y^2-2x+(2-h)y=0.$$
Sappiamo, per via dell'assegnazione iniziale, che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due usate per scriverne l'equazione. Ciò vuol dire che per $h\neq 0$ abbiamo coniche irriducibili e per $h=0$ una conica spezzata. Inoltre:
$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h-1 \end{vmatrix}=h-1,$$
da cui vediamo che per $h>1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali vi è una circonferenza per $h=2$; per $h=1$ abbiamo una parabola; per $h<1$, $h\neq 0$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:
$$x^2-2x+y+z(ax+by+cz+d)=0.$$
Facciamo l'intersezione con la retta data:
$$\begin{cases} x^2-2x+y+z(ax+by+cz+d)=0 \\ x=z \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b+c+1)z^2+(d-1)z=0 \\ x=z \\ y=z. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a+b+c+1=0$ e $d-1=0$. Inoltre, imponendo che la quadrica $x^2-2x+y+z(ax+by+cz+d)=0$ passi per Q otteniamo la condizione $a+c+d-1=0$. Dunque, le quadriche cercate sono tali che:

$$\begin{cases} a+b+c+1=0 \\ d-1=0 \\ a+c+d-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-a \\ d=1. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche date hanno equazione:

$$x^2-2x+y+z(ax-y-az+1)=0 \Rightarrow x^2+axz-yz-az^2-2x+y+z=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} & -a & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} & -a \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $|B|=\dfrac{a^2}{16}$ e $|A|=-\frac{1}{4}$. Dunque, tenendo conto del fatto che le quadriche, per l'assegnazione iniziale, contengono sempre punti reali, concludiamo che per $a\neq 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $a=0$ abbiamo un cono.