CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare** - 29 Aprile 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito D

Sono assegnati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = 0\},$$

i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,1,0) \in V$ e la base $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$ di W, dove $w_1 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,0,0,1)$ e $w_3 = (0,1,-1,0)$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2w_1 + (2k-2)w_2 - 2w_3 \\ f(v_2) &= w_1 + (k-1)w_2 + (k-1)w_3 \\ f(v_3) &= w_1 - 3w_2 + w_3. \end{aligned}$$

1. Studiare f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Nel caso $k = 1$, determinare una matrice associata all'applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to W$ tale che $\varphi|_V = f$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \mathscr{L}((0,0,0,1))$.
3. Dato $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(x,y,z,t) = (x - ky - kz + 2t, x + z + t, -x + y - t, -t)$ per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, studiare la semplicità di g al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
4. Risolvere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\begin{cases} -x + (k+1)y + z = 1 \\ (k+1)x + y + z = -1 \\ x + y + (k+1)z = k+1. \end{cases}$$

Soluzione

1. Si vede facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Dunque, è immediato scrivere la matrice:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2k-2 & k-1 & -3 \\ -2 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)| = 2k(k+2)$, vediamo che per $k \neq -2, 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = W$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.
Sia $k = -2$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[w_1 - 3w_2 - 3w_3, w_1 - 3w_2 + w_3] = [(1,-3,3,-3), (1,1,-1,-3)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a+b+c=0,\ -4a-4b=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,-a,-a)\} = \mathscr{L}\left(v_1 - v_2 - v_3\right) = \mathscr{L}\left((1,-1,-1,1)\right). \end{aligned}$$

Sia $k = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[w_1 - w_2 - w_3, w_1 - 3w_2 + w_3] = [(1,-1,1,-1),(1,1,-1,-3)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a+b+c=0,\ -2c=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,-2a,0)\} = \mathscr{L}\left(v_1 - 2v_2\right) = \mathscr{L}\left((1,-2,0,1)\right). \end{aligned}$$

2. È chiaro che $(0,0,0,1) \notin V$, poiché non verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, i vettori v_1, v_2, v_3, e_4 sono linearmente indipendenti e, perciò, individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque, le assegnazioni:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) =& f(v_1) = 2w_1 - 2w_3 \\ \varphi(v_2) =& f(v_2) = w_1 \\ \varphi(v_3) =& f(v_3) = w_1 - 3w_2 + w_3 \\ \varphi(e_4) =& (0,0,0,0) \end{aligned}$$

determinano perfettamente φ. Inoltre, posto $\mathcal{C} = [v_1, v_2, v_3, e_4]$, abbiamo chiaramente che:

$$M^{\mathcal{C},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si vede che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -k & -k & 2 \\ 1 & -T & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -T & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-1-T)^2.$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 2$. g è semplice se, contemporaneamente, si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & -k & -k & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando righe, per } k \neq 0} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & -k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(g_1)) = 3$ per $k \neq 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Mentre $\rho(M(g_1)) = 2$ per $k = 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che g potrebbe essere semplice solo per $k = 0$. Calcoliamo, comunque, l'autospazio in tale caso:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0,\ -2t = 0\} = \mathscr{L}\left((1,1,0,0),(-1,0,1,0)\right).$$

Sia $k = 0$ e $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M(g_{-1}) = M(g) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $k = 0$ $\rho(M(g_{-1}) = 2$ e $\dim V_{-1} = 4 - 2 = 2 = m_{-1}$. Dunque, solo per $k = 0$ g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Calcoliamo l'autospazio:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2t = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\right).$$

Dunque, per $k = 0$ una base di autovettori per g è $[(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)]$.

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k+1 & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & k+1 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo per } k \neq -2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k+1 & 1 & 1 \\ k+2 & -k & 0 & -2 \\ 0 & -k^2-k & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dunque, vediamo subito che per $k \neq -2, -1, 0$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} -x + (k+1)y + z = 1 \\ (k+2)x - ky = -2 \\ (-k^2 - k)y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{k+1} \\ y = -\dfrac{2}{k^2+k} \\ z = \dfrac{k^2+k+2}{k^2+k}. \end{cases}$$

Perciò, per $k \neq -2, -1, 0$ la soluzione del sistema è $\left\{\left(-\dfrac{2}{k+1}, -\dfrac{2}{k^2+k}, \dfrac{k^2+k+2}{k^2+k}\right)\right\}$.

Dalla matrice ridotta ottenuta in precedenza vediamo subito che per $k = 0$ e $k = -1$ il sistema è impossibile.

Sia $k = -2$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $k = -2$ abbiamo una sola incognita libera:

$$\begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = z \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema sono $\{(z, -1, z) \in \mathbb{R}^3\}$.