

CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di Algebra Lineare - 29 Aprile 2019

Durata della prova: due ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

È vietato consultare libri o appunti.

Compito C

Sono assegnati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\},$$

i vettori $v_1 = (0, 0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0) \in V$ e la base $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$ di W , dove $w_1 = (1, -1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_3 = (0, 0, 0, 1)$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -2w_1 + 2w_2 + (-2h - 2)w_3 \\ f(v_2) &= (-h - 1)w_1 + w_2 + (-h - 1)w_3 \\ f(v_3) &= w_1 + w_2 - 3w_3. \end{aligned}$$

1. Studiare f , al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
2. Nel caso $h = -2$, determinare una matrice associata all'applicazione lineare $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow W$ tale che $\varphi|_V = f$ e $\text{Ker } \varphi = \mathcal{L}((0, 0, 1, 0))$.
3. Dato $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $g(x, y, z, t) = (x + y - z, hx + z, hx + y, 2x + y - z - t)$ per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
4. Risolvere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\begin{cases} -x + (-h - 1)y + z = 1 \\ (-h - 1)x + y + z = -1 \\ x + y + (-h - 1)z = -h - 1. \end{cases}$$

Soluzione

1. Si vede facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V . Dunque, è immediato scrivere la matrice:

$$M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -h - 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2h - 2 & -h - 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f)| = 2h(h - 2)$, vediamo che per $h \neq 0, 2$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\text{Im } f = W$ e $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \text{Im } f = \rho(M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[-3w_1 + w_2 - 3w_3, w_1 + w_2 - 3w_3] = [(-3, 3, 1, -3), (1, -1, 1, -3)].$$

Inoltre, $\dim \text{Ker } f = \dim V - \dim \text{Im } f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), -2a - 3b + c = 0, 4a + 4b = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, -a, -a)\} = \mathcal{L}(v_1 - v_2 - v_3) = \mathcal{L}((-1, -1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \text{Im } f = \rho(M^{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[-w_1 + w_2 - w_3, w_1 + w_2 - 3w_3] = [(-1, 1, 1, -1), (1, -1, 1, -3)].$$

Inoltre, $\dim \text{Ker } f = \dim V - \dim \text{Im } f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), -2a - b + c = 0, 2c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, -2a, 0)\} = \mathcal{L}(v_1 - 2v_2) = \mathcal{L}((-2, 0, 1, 1)). \end{aligned}$$

2. È chiaro che $(0, 0, 1, 0) \notin V$, poiché non verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, i vettori v_1, v_2, v_3, e_3 sono linearmente indipendenti e, perciò, individuano una base di \mathbb{R}^4 . Dunque, le assegnazioni:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= f(v_1) = -2w_1 + 2w_2 + 2w_3 \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = w_1 + w_2 + w_3 \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = w_1 + w_2 - 3w_3 \\ \varphi(e_3) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

determinano perfettamente φ . Inoltre, posto $\mathcal{C} = [v_1, v_2, v_3, e_3]$, abbiamo chiaramente che:

$$M^{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si vede che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ h & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & -1 & 0 \\ h & -T & 1 & 0 \\ h & 1 & -T & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-1-T)^2.$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e -1 , con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 2$. g è semplice se, contemporaneamente, si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \text{Ker } g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ h & -1 & 1 & 0 \\ h & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e con uno scambio di righe}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(g_1)) = 3$ per $h \neq 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Mentre $\rho(M(g_1)) = 2$ per $h = 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che g potrebbe essere semplice solo per $h = 0$. Calcoliamo, comunque, l'autospazio in tale caso:

$$V_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0, 2x - 2t = 0\} = \mathcal{L}((0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)).$$

Sia $h = 0$ e $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \text{Ker } g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M(g_{-1}) = M(g) + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h = 0$ $\rho(M(g_{-1})) = 2$ e $\dim V_{-1} = 4 - 2 = 2 = m_{-1}$. Dunque, solo per $h = 0$ g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Calcoliamo l'autospazio:

$$V_{-1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z = 0, y + z = 0\} = \mathcal{L}((1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Dunque, per $h = 0$ una base di autovettori per g è $[(0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -h-1 & 1 & 1 \\ -h-1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -h-1 & -h-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo per } h \neq 0} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -h-1 & 1 & 1 \\ -h & h+2 & 0 & -2 \\ 0 & -h^2-3h-2 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Dunque, vediamo subito che per $h \neq -2, -1, 0$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} -x + (-h-1)y + z = 1 \\ -hx + (h+2)y = -2 \\ (-h^2-3h-2)y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{h+1} \\ y = -\frac{2}{h^2+3h+2} \\ z = \frac{h^2+3h+4}{h^2+3h+2} \end{cases}$$

Perciò, per $h \neq -2, -1, 0$ si ha la soluzione $\left\{ \left(\frac{2}{h+1}, -\frac{2}{h^2+3h+2}, \frac{h^2+3h+4}{h^2+3h+2} \right) \right\}$.

Dalla matrice ridotta ottenuta in precedenza vediamo subito che per $h = -1$ e $h = -2$ il sistema è impossibile.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dunque, per $h = 0$ abbiamo una sola incognita libera:

$$\begin{cases} -x - y + z = 1 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = z \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema sono $\{(z, -1, z) \in \mathbb{R}^3\}$.