CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare** - 29 Aprile 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

Sono assegnati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0\},$$

i vettori $v_1 = (0,1,1,0)$, $v_2 = (0,0,0,1)$, $v_3 = (1,0,0,0) \in V$ e la base $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$ di W, dove $w_1 = (0,1,0,0)$, $w_2 = (0,0,1,0)$ e $w_3 = (-1,0,0,1)$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -kw_1 + w_2 - kw_3 \\ f(v_2) &= w_1 + w_2 - 3w_3 \\ f(v_3) &= -2w_1 + 2w_2 - 2kw_3. \end{aligned}$$

1. Studiare f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Nel caso $k = -1$, determinare una matrice associata all'applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to W$ tale che $\varphi|_V = f$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \mathscr{L}((0,1,0,0))$.
3. Dato $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(x,y,z,t) = (-x, 2x + y + kz + kt, x + y + t, -x - y + z)$ per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, studiare la semplicità di g al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
4. Risolvere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\begin{cases} -kx + y - z = 1 \\ x + y - kz = -1 \\ x - ky + z = -k. \end{cases}$$

Soluzione

1. Si vede facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Dunque, è immediato scrivere la matrice:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -k & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -k & -3 & -2k \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)| = 2(k-1)(k-3)$, vediamo che per $k \neq 1, 3$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = W$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $k = 3$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[-3w_1 + w_2 - 3w_3, w_1 + w_2 - 3w_3] = [(3,-3,1,-3), (3,1,1,-3)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -3a+b-2c=0,\ 4a+4c=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,a,-a)\} = \mathscr{L}(v_1+v_2-v_3) = \mathscr{L}((-1,1,1,1)).\end{aligned}$$

Sia $k=1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[-w_1+w_2-w_3, w_1+w_2-3w_3] = [(1,-1,1,-1),(3,1,1,-3)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a+b-2c=0,\ 2b=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-2c,0,c)\} = \mathscr{L}(-2v_1+v_3) = \mathscr{L}((1,-2,-2,0)).\end{aligned}$$

2. È chiaro che $(0,1,0,0) \notin V$, poiché non verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, i vettori v_1, v_2, v_3, e_2 sono linearmente indipendenti e, perciò, individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque, le assegnazioni:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &= f(v_1) = -w_1+w_2+w_3 \\ \varphi(v_2) &= f(v_2) = w_1+w_2-3w_3 \\ \varphi(v_3) &= f(v_3) = -2w_1+2w_2+2w_3 \\ \varphi(e_2) &= (0,0,0,0)\end{aligned}$$

determinano perfettamente φ. Inoltre, posto $\mathcal{C} = [v_1, v_2, v_3, e_2]$, abbiamo chiaramente che:

$$M^{\mathcal{C},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si vede che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & k & k \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-T & k & k \\ 1 & 1 & -T & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-1-T)^2.$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 2$. g è semplice se, contemporaneamente, si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k & k \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo e con uno scambio di righe}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(g_1)) = 3$ per $k \neq 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Mentre $\rho(M(g_1)) = 2$ per $k = 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che g potrebbe essere semplice solo per $k = 0$. Calcoliamo, comunque, l'autospazio in tale caso:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x = 0,\ y - z + t = 0\} = \mathscr{L}\left((0,1,0,-1),(0,0,1,1)\right).$$

Sia $k = 0$ e $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M(g_{-1}) = M(g) + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $k = 0$ $\rho(M(g_{-1}) = 2$ e $\dim V_{-1} = 4 - 2 = 2 = m_{-1}$. Dunque, solo per $k = 0$ g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Calcoliamo l'autospazio:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y = 0,\ z + t = 0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\right).$$

Dunque, per $k = 0$ una base di autovettori per g è $[(0,1,0,-1),(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)]$.

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 1 & -k & 1 & -k \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo per } k\neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} -k & 1 & -1 & 1 \\ 1+k & 0 & -k+1 & -2 \\ -k-k^2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dunque, vediamo subito che per $k \neq 0, 1, -1$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} -kx + y - z = 1 \\ (1+k)x + (-k+1)z = -2 \\ (-k-k^2)x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{k^2+k}, \\ y = \dfrac{k^2+k+2}{k^2+k} \\ z = \dfrac{2}{k}. \end{cases}$$

Perciò, per $k \neq 0, 1, -1$ si ha la soluzione $\left\{\left(-\dfrac{2}{k^2+k}, \dfrac{k^2+k+2}{k^2+k}, \dfrac{2}{k}\right)\right\}$.
Dalla matrice ridotta ottenuta in precedenza vediamo subito che per $k = 0$ e $k = -1$ il sistema è impossibile.
Sia $k = 1$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $k = 1$ abbiamo una sola incognita libera:

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema sono $\{(-1, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$.