CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare** - 29 Aprile 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

Sono assegnati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\},$$

i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,0,0,1) \in V$ e la base $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$ di W, dove $w_1 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,1,0,0)$ e $w_3 = (0,0,1,-1)$. È assegnata, inoltre, l'applicazione lineare $f \colon V \to W$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 + hw_2 + hw_3 \\ f(v_2) &= w_1 - 3w_2 + w_3 \\ f(v_3) &= 2w_1 + 2hw_2 - 2w_3. \end{aligned}$$

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Nel caso $h = 0$, determinare una matrice associata all'applicazione lineare $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to W$ tale che $\varphi|_V = f$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \mathscr{L}((1,0,0,0))$.
3. Dato $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g(x,y,z,t) = (-x + 2y + z - t, y + z - t, -hy + t, -hy + z)$ per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
4. Risolvere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il sistema:

$$\begin{cases} hx + y - z = 1 \\ x + y + hz = -1 \\ x + hy + z = h. \end{cases}$$

Soluzione

1. Si vede facilmente che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Dunque, è immediato scrivere la matrice:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ h & -3 & 2h \\ h & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)| = 2(h+1)(h+3)$, vediamo che per $h \neq -1, -3$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = W$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = -3$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[w_1 - 3w_2 - 3w_3, w_1 - 3w_2 + w_3] = [(1,-3,-3,3), (1,-3,1,-1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a+b+2c=0,\ -4a-4c=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,a,-a)\} = \mathscr{L}(v_1+v_2-v_3) = \mathscr{L}((1,1,1,-1)).\end{aligned}$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)) = 2$ e una sua base è data da:

$$[w_1 - w_2 - w_3, w_1 - 3w_2 + w_3] = [(1,-1,-1,1),(1,-3,1,-1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a+b+2c=0,\ -2b=0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-2c,0,c)\} = \mathscr{L}(2v_1-v_3) = \mathscr{L}((2,2,0,-1)).\end{aligned}$$

2. È chiaro che $(1,0,0,0) \notin V$, poiché non verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, i vettori v_1, v_2, v_3, e_1 sono linearmente indipendenti e, perciò, individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque, le assegnazioni:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) =& f(v_1) = w_1 \\ \varphi(v_2) =& f(v_2) = w_1 - 3w_2 + w_3 \\ \varphi(v_3) =& f(v_3) = 2w_1 - 2w_3 \\ \varphi(e_1) =& (0,0,0,0)\end{aligned}$$

determinano perfettamente φ. Inoltre, posto $\mathcal{C} = [v_1, v_2, v_3, e_1]$, abbiamo chiaramente che:

$$M^{\mathcal{C},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si vede che:

$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -h & 0 & 1 \\ 0 & -h & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1-T & 1 & -1 \\ 0 & -h & -T & 1 \\ 0 & -h & 1 & -T \end{vmatrix} = (1-T)^2(-1-T)^2.$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 2$. g è semplice se, contemporaneamente, si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M(g_1) = M(g) - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -h & -1 & 1 \\ 0 & -h & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(g_1)) = 3$ per $h \neq 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Mentre $\rho(M(g_1)) = 2$ per $h = 0$, per cui $\dim V_1 = 4 - 2 = 2 = m_1$. Ciò vuol dire che g potrebbe essere semplice solo per $h = 0$. Calcoliamo, comunque, l'autospazio in tale caso:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + 2y + z - t = 0,\ z - t = 0\} = \mathscr{L}\left((1,1,0,0),(0,0,1,1)\right).$$

Sia $h = 0$ e $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:

$$M(g_{-1}) = M(g) + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h = 0$ $\rho(M(g_{-1}) = 2$ e $\dim V_{-1} = 4 - 2 = 2 = m_{-1}$. Dunque, solo per $h = 0$ g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Calcoliamo l'autospazio:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z - t = 0,\ z + t = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0,0),(0,-1,1,-1)\right).$$

Dunque, per $h = 0$ una base di autovettori per g è $[(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0),(0,-1,1,-1)]$.

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & h & -1 \\ 1 & h & 1 & h \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo per } h \neq -1} \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & -1 & 1 \\ 1-h & 0 & h+1 & -2 \\ h-h^2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dunque, vediamo subito che per $h \neq 0, 1, -1$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} hx + y - z = 1 \\ (1-h)x + (h+1)z = -2 \\ (h-h^2)x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{h-h^2}, \\ y = \dfrac{-h^2+h-2}{h-h^2} \\ z = -\dfrac{2}{h}. \end{cases}$$

Perciò, per $h \neq 0, 1, -1$ la soluzione del sistema è $\left\{\left(\dfrac{2}{h-h^2}, \dfrac{-h^2+h-2}{h-h^2}, -\dfrac{2}{h}\right)\right\}$.

Dalla matrice ridotta ottenuta in precedenza vediamo subito che per $h = 0$ e $h = 1$ il sistema è impossibile.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h = -1$ abbiamo una sola incognita libera:

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema sono $\{(-1, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$.