Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 Aprile 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0\}$ e l'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1, 0) &= (1, 2h, 1, 0) \\ f(0, 1, 0, 0) &= (0, 3, 0, -1) \\ f(0, 0, 0, 1) &= (0, -1, 0, 3), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Verificare che f è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$ e determinare una base di autovettori per f.
3. Posto $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = y - t = 0\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale la restrizione $f|_W$ induce un endomorfismo $f' : W \to W$.
4. Nel caso $h = 0$ determinare un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non iniettivo che sia estensione di f e determinare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
5. Verificare che φ è semplice e determinare una base di autovettori.

Soluzione

1. Osserviamo che i vettori $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ $(0, 0, 0, 1) \in V$ sono linearmente indipendenti, per cui $\mathscr{A} = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$ è una base di $V = \{(x, y, x, t) \in \mathbb{R}^4\}$. Inoltre:

$$(x, y, x, t) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1),$$

per cui $[(x, y, x, t)]_{\mathscr{A}} = (x, y, t)$ per ogni $(x, y, x, t) \in V$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2h & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 8 \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, concludiamo che per ogni $h \in \mathbb{R}$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e $\operatorname{Im} f = V$.

2. Dato che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 2h & 3-T & -1 \\ 0 & -1 & 3-T \end{vmatrix} = (1-T)(2-T)(4-T),$$
gli autovalori sono 1, 2 e 4, tutti di molteplicità algebrica 1, per cui f è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$. Sappiamo che:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h & 2 & -1 \\ 4h & 3 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2ha + 2b - c = 0,\ 4ha + 3b = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, -\tfrac{4h}{3}a, -\tfrac{2h}{3}a)\} = \mathscr{L}(3v_1 - 4hv_2 - 2hv_3) = \mathscr{L}\left((3,-4h,3,-2h)\right). \end{aligned}$$
Calcoliamo $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$. Sappiamo che:
$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2h & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a = 0,\ b - c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,b)\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3) = \mathscr{L}\left((0,1,0,1)\right). \end{aligned}$$
Calcoliamo $V_4 = \operatorname{Ker} f_4$, dove $f_4 = f - 4i$. Sappiamo che:
$$M^{\mathscr{A}}(f_4) = M^{\mathscr{A}}(f) - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2h & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$\begin{aligned} V_4 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -3a,\ -b - c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,-b)\} = \mathscr{L}(v_2 - v_3) = \mathscr{L}\left((0,1,0,-1)\right). \end{aligned}$$
Dunque, una base di autovettori è $[(3,-4h,3,-2h),(0,1,0,1),(0,1,0,-1)]$.

3. Si vede che $W = \mathscr{L}\left((1,0,1,0),(0,1,0,1)\right)$. Inoltre, sappiamo che la restrizione $f|_W$ induce un endomorfismo se $f(W) \subseteq W$. Dato che $f(W) = \mathscr{L}(f(1,0,1,0), f(0,1,0,1))$ e che $(0,1,0,1) \in V_2$, abbiamo che:
$$f(W) = \mathscr{L}\left((1,2h,1,0),(0,2,0,2)\right)$$
e $(1,2h,1,0),(0,2,0,2) \in W$ solo se $h = 0$.

4. Prendiamo un qualsiasi vettore non appartenente a V, per esempio $e_1 = (1,0,0,0)$. Dunque, $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$ e $(1,0,0,0)$ sono linearmente indipendenti ed individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Inoltre, ponendo:
$$\begin{aligned} \varphi(1,0,1,0) &= f(1,0,1,0) = (1,2h,1,0) \\ \varphi(0,1,0,0) &= f(0,1,0,0) = (0,3,0,-1) \\ \varphi(0,0,0,1) &= f(0,0,0,1) = (0,-1,0,3) \\ \varphi(1,0,0,0) &= (0,0,0,0), \end{aligned}$$

abbiamo uno degli endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano le condizioni richieste ed è semplice vedere che:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2h & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Dato che $[(3,-4h,3,-2h),(0,1,0,1),(0,1,0,-1)]$ è una base di autovettori per f per ogni $h \in \mathbb{R}$, che $\varphi(1,0,0,0) = (0,0,0,0) = 0 \cdot (1,0,0,0)$ e che $(1,0,0,0) \notin V$, concludiamo immediatamente che $[(3,-4h,3,-2h),(0,1,0,1),(0,1,0,-1),(1,0,0,0)]$ è una base di autovettori per φ per ogni $h \in \mathbb{R}$. In particolare, φ è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare il punto della retta $r\colon x + y - 2 = y - z = 0$ equidistante dagli assi cartesiani.
2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$hx^2 + y^2 + (h-1)xy + hy = 0,$$

determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Detta Γ la conica del fascio passante per il punto $(1, -\frac{1}{2}, 0)$, determinare centro e assi di simmetria di Γ.

3. Detta c la circonferenza del fascio, determinare e studiare le quadriche contenenti c e le rette di equazioni $x = y = z$ e $x = y + 1 = z$.

Soluzione

1. Il generico punto della retta r è $R = (2-a, a, a)$. Il piano π_1 ortogonale all'asse $\vec{x}\colon y = z = 0$ e passante per R ha equazione $x = 2 - a$. Posto $H_1 = \pi_1 \cap \vec{x}$, vediamo subito che $H_1 = (2-a, 0, 0)$ e:

$$d(R, \vec{x}) = \overline{RH_1} = \sqrt{2}|a|.$$

Nella stessa maniera vediamo che $d(R, \vec{y}) = \sqrt{2a^2 - 4a + 4}$ e $d(R, \vec{z}) = \sqrt{2a^2 - 4a + 4}$. Dunque, il punto cercato è tale che:

$$\sqrt{2}|a| = \sqrt{2a^2 - 4a + 4} \Rightarrow a = 1.$$

Dunque, $R = (1,1,1)$.

2. La conica nascosta del fascio ha equazione $x^2 + xy + y = 0$. Dato che le sue matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = -\frac{1}{4} \neq 0$, $|A| = -\frac{1}{4} < 0$ e $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, per cui tale conica è un'iperbole non equilatera.

Le matrici associate al fascio sono, invece:

$$B = \begin{pmatrix} h & \frac{h-1}{2} & 0 \\ \frac{h-1}{2} & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & \frac{h-1}{2} \\ \frac{h-1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = -\frac{h^3}{4}$. Dunque, per $h = 0$ abbiamo l'unica conica spezzata del fascio ed essa ha equazione $y(y-x) = 0$. Per determinare i punti base è sufficiente fare l'intersezione con una qualsiasi conica del fascio:

$$\begin{cases} y(y-x) = 0 \\ x^2 + xy + y = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo il punto $(0,0)$, contato tre volte, e $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Inoltre, essendo $|A| = \frac{-h^2+6h-1}{4}$ e $\mathrm{Tr}(A) = h+1$, vediamo che per $h < 3-2\sqrt{2}$ e $h > 3+2\sqrt{2}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali vi è l'equilatera per $h = -1$; per $h = 3 \pm 2\sqrt{2}$ abbiamo delle parabole; per $3-2\sqrt{2}zh < 3+2\sqrt{2}$ abbiamo delle ellissi, tra le quali figura una circonferenza per $h = 0$.

Imponendo il passaggio per il punto $(1, -\frac{1}{2})$ al fascio di coniche otteniamo un'equazione impossibile. Ciò vuol dire che la conica del fascio passante per tale punto è quella nascosta $x^2 + xy + y = 0$. Essendo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

otteniamo il centro di simmetria:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto $C = (1, -2)$. Dato che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo subito che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -T \end{vmatrix} = T^2 - T - \frac{1}{4},$$

per cui gli autovalori di A sono $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. L'autospazio associato all'autovalore $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ha equazione $\frac{1-\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$ e un primo asse di simmetria è la retta parallela ad essa e passante per C:

$$(1-\sqrt{2})x + y + 1 + \sqrt{2} = 0.$$

Analogamente, l'autospazio associato all'autovalore $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ ha equazione $\frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$ e l'altro asse di simmetria è la retta parallela ad essa e passante per C:

$$(1+\sqrt{2})x + y + 1 - \sqrt{2} = 0.$$

3. La circonferenza del fascio ha equazioni $x^2 + y^2 + y = z = 0$, per cui le quadriche che la contengono hanno equazione:

$$x^2 + y^2 + y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecandole con $x = y = z$ abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b+c+2)x^2 + (d+1)x = 0 \\ y = x \\ z = x. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a+b+c+2=0$ e $d+1=0$. Analogamente, intersecando la quadrica con la retta $x=y+1=z$ abbiamo:

$$\begin{cases} x^2+y^2+y+z(ax+by+cz+d)=0 \\ y=x-1 \\ z=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b+c+2)x^2+(-b+d-1)x=0 \\ y=x-1 \\ z=x \end{cases}$$

e la retta risulta contenuta nella quadrica se $a+b+c+2=0$ e $-b+d-1=0$. Dunque, le quadriche cercate sono tali che:

$$\begin{cases} a+b+c+2=0 \\ d+1=0 \\ -b+d-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ d=-1 \\ c=-a \end{cases}$$

ed hanno equazione:

$$x^2+y^2+axz-2yz-az^2+y-z=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & -1 & -a & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{a}{2} & -1 & -a \end{pmatrix},$$

per cui $|B|=\frac{(a+2)^2}{16}$ e $|A|=-\frac{(a+2)^2}{4}$. Dunque, per $a\neq -2$ abbiamo $|B|>0$ e $|A|\neq 0$ e le quadriche sono necessariamente iperboloidi iperbolici e non ellissoidi immaginari, in quanto per costruzione contengono punti reali. Per $a=-2$ abbiamo $|B|=|A|=0$ e, verificando facilmente che in tal caso $\rho(B)=3$, abbiamo un cilindro