Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Giugno 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (0,0,1,0)$ e il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$.

1. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale le relazioni:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, -3, 1-2h, -1) \\ f(v_2) &= (-3, h-1, 5, h+2) \\ f(v_3) &= (-3, 2h, -3h, -1) \end{aligned}$$
definiscono un endomorfismo $f\colon V \to V$.

2. Verificare che f è semplice e determinare una base di V formata da autovettori.

3. Determinare la generica applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V sia estensione di f e tale che $\operatorname{Im} g = V$.

4. Determinare il valore del parametro reale k per cui esista, tra le applicazioni lineari g determinate in precedenza, un'applicazione lineare $g'\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g'(0,1,0,0) = (0, k+1, k, 0)$. Scrivere la matrice associata a g' rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e diagonalizzarla.

Soluzione

1. Da:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y + t = 0,$$
vediamo che $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\}$ e che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Affinché le assegnazioni date individuino un endomorfismo di V, deve essere:
$$\begin{aligned} &f(v_1) \in V \Leftrightarrow h + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow h = -2 \\ &f(v_2) \in V \Leftrightarrow -3 - h + 1 + h + 2 = 0: \quad \text{si verifica} \quad \forall h \in \mathbb{R} \\ &f(v_3) \in V \Leftrightarrow -3 - 2h - 1 = 0 \Leftrightarrow h = -2. \end{aligned}$$
Ciò vuol dire che deve essere $h = -2$.

2. Sia $h = -2$. Osserviamo che $V = \{(x, x+t, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$ e che:
$$(x, x+t, z, t) = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a, a+b, c, b) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a + b = x + t \\ c = z \\ b = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = t \\ c = z. \end{cases}$$

Dunque, possiamo dire che $[(x, x+t, z, t)]_{\mathscr{A}} = (x, t, z)$ per ogni $(x, x+t, z, t) \in V$. Dunque:

$$\begin{aligned}
[f(v_1)]_{\mathscr{A}} &= [(-2, -3, 5, -1)]_{\mathscr{A}} = (-2, -1, 5) \\
[f(v_2)]_{\mathscr{A}} &= [(-3, -3, 5, 0)]_{\mathscr{A}} = (-3, 0, 5) \\
[f(v_3)]_{\mathscr{A}} &= [(-3, -4, 6, -1)]_{\mathscr{A}} = (-3, -1, 6),
\end{aligned}$$

per cui:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -2-T & -3 & -3 \\ -1 & -T & -1 \\ 5 & 5 & 6-T \end{vmatrix} = -T^3 + 4T^2 - 5T + 2 = (1-T)^2(2-T).$$

Gli autovalori sono $T = 1$ e $T = 2$, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. f è semplice se, contemporaneamente, si ha $\dim V_1 = m_1 = 2$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$, laddove quest'ultima disuguaglianza risulta, però, banalmente verificata.

Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 1$, in quanto le righe sono tutte proporzionali tra loro, per cui $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = m_2$. Ciò vuol dire che f è semplice. Calcoliamo V_1:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a + b + c = 0\} = \\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, -a-b)\} = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3) = \mathscr{L}\left((1, 1, -1, 0), (0, 1, -1, 1)\right).
\end{aligned}$$

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambiando } R_1 \text{ e } R_2 \text{ e riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ -a - 2b - c = 0,\ 5b + c = 0\} = \\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (3b, b, -5b)\} = \mathscr{L}(3v_1 + v_2 - 5v_3) = \mathscr{L}\left((3, 4, -5, 1)\right).
\end{aligned}$$

Concludiamo subito che una base di autovettori è $[(1, 1, -1, 0), (0, 1, -1, 1), (3, 4, -5, 1)]$.

3. Cominciamo con l'osservare che f è un isomorfismo, in quanto $|M^{\mathscr{A}}(f)| \neq 0$. In particolare, f è suriettiva e $\operatorname{Im} f = V$. Prendiamo $e_1 = (1, 0, 0, 0) \notin V$ (in quanto non verifica la sua equazione cartesiana), per cui v_1, v_2, v_3, e_1 sono linearmente indipendenti ed individuano, perciò, una base $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3, e_1]$ di $\mathbb{R}^4$. Dovendo essere $\operatorname{Im} g = V$, deve essere $g(e_1) \in V$, cioè $g(e_1) = (a, a+c, b, c)$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dunque, possiamo dire che tutte le applicazioni cercate sono esattamente quelle tali che:

$$\begin{aligned}
g(v_1) &= f(v_1) = (-3, -3, 5, -1) \\
g(v_2) &= f(v_2) = (-3, -3, 5, 0) \\
g(v_3) &= f(v_3) = (-3, -4, 6, -1) \\
g(e_1) &= (a, a+c, b, c),
\end{aligned}$$

per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Osserviamo che $e_2 = (0,1,0,0) \notin V$, per cui $[v_1, v_2, v_3, e_2]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Deve valere, come nel punto precedente, la condizione $g'(0,1,0,0) \in V$, cioè deve essere $-k-1=0 \Rightarrow k=-1$. Dunque, l'applicazione lineare g' è determinata dalle condizioni:
$$\begin{aligned} g(v_1) &= f(v_1) = (-3,-3,5,-1) \\ g(v_2) &= f(v_2) = (-3,-3,5,0) \\ g(v_3) &= f(v_3) = (-3,-4,6,-1) \\ g(e_2) &= (0,0,-1,0), \end{aligned}$$
da cui è semplice determinare la matrice associata a g' rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:
$$M(g') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -4 & -3 \\ 6 & -1 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
È possibile stabilire quali siano gli autovalori di g' senza calcolare il suo polinomio caratteristico. Infatti, dal momento che la restrizione di g' a V induce f, possiamo certamente affermare che gli autovettori per f sono anche autovettori per g'. In particolare, i vettori $(1,1,-1,0), (0,1,-1,1), (3,4,-5,1)$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ e deve accadere che $(1,1,-1,0), (0,1,-1,1) \in V_1$ e $(3,4,-5,1) \in V_2$. Osserviamo, poi, che, essendo $\operatorname{Im} g' = V$, si ha $\dim \operatorname{Ker} g' = 4 - \dim \operatorname{Im} g' > 0$, per cui $\operatorname{Ker} g' \neq \{(0,0,0,0)\}$ e 0 è autovalore per g'. Per quanto detto, gli autovalori sono necessariamente 0, 1 e 2, con $m_0 = 1$, $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$, dove sappiamo già che $V_1 = \mathscr{L}((1,1,-1,0),(0,1,-1,1))$ e $V_2 = \mathscr{L}((3,4,-5,1))$. Per quel che riguarda V_0, basta ricordarsi che $V_0 = \operatorname{Ker} g'$. Da
$$M(g') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -4 & -3 \\ 6 & -1 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vediamo subito che:
$$V_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x-3z-3t=0,\ -x-z=0,\ 2x-y=0\} = \mathscr{L}\left((3,6,-3,1)\right).$$
Dunque, $\mathcal{C} = [(1,1,-1,0),(0,1,-1,1),(3,4,-5,1),(3,6,-3,1)]$ è una base di autovettori per g' e, date:
$$D = M^{\mathcal{C}}(g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
si ha $P^{-1} \cdot M(g) \cdot P = D$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Data la rette $r\colon x+y-2 = y-z = 0$, determinare il punto P di r equidistante dagli assi cartesiani.
2. Determinare l'equazione del cono formato dalle rette che passano per il punto $(1,1,1)$ e formano con r un angolo il cui coseno è $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. Nel piano $z=0$ si determini e si studi il fascio di coniche tangenti in $A=(0,1,0)$ all'asse $\vec{y}$ e tangenti in $B=(2,1,0)$ alla retta $x-2y=z=0$.
4. Date le coniche:
$$p_1\colon \begin{cases} x^2-2xy+y^2-2y+1=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \text{e} \quad p_2\colon \begin{cases} z^2-2x+1=0 \\ x-y=0, \end{cases}$$
si determini l'equazione del fascio di quadriche contenenti p_1 e p_2.

5. Studiare il fascio di quadriche trovato.

Soluzione

1. Il generico punto della retta r è $R = (2-a, a, a)$. Il piano π_x passante per R e ortogonale all'asse $\vec{x}$ è $\pi_x\colon x = 2-a$ e $\pi_x \cap \vec{x}$ è il punto $P_x = (2-a, 0, 0)$. Dunque:
$$d(R, \vec{x}) = \overline{RP_x} = \sqrt{2}|a|.$$
Analogamente, il piano π_y passante per R e ortogonale all'asse $\vec{y}$ è $\pi_y\colon y = a$ e $\pi_y \cap \vec{y}$ è il punto $P_y = (0, a, 0)$. Dunque:
$$d(R, \vec{y}) = \overline{RP_y} = \sqrt{(2-a)^2 + a^2}.$$
Infine, il piano π_z passante per R e ortogonale all'asse $\vec{z}$ è $\pi_z\colon z = a$ e $\pi_z \cap \vec{z}$ è il punto $P_z = (0, 0, a)$. Dunque:
$$d(R, \vec{z}) = \overline{RP_z} = \sqrt{(2-a)^2 + a^2}.$$
Deve essere:
$$\sqrt{(2-a)^2 + a^2} = \sqrt{2}|a| \Rightarrow a = 1.$$
Concludiamo che il punto cercato è $(1, 1, 1)$.

2. La generica retta passante per P ha equazioni:
$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$$
e, osservato che la retta r ha parametri direttori $(1, -1, -1)$, deve essere:
$$\frac{l - m - n}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Elevando al quadrato:
$$lm + ln - mn = 0.$$
Ricavando l, m, n dalle equazioni della generica retta passante per P abbiamo l'equazione del cono:
$$(x-1)(y-1) + (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1) = 0.$$

3. Le coniche spezzate del fascio sono le due di equazioni $x(x-2y) = 0$ e $(y-1)^2 = 0$. Dunque, il fascio ha equazione:
$$hx(x-2y) + (y-1)^2 = 0.$$
Inoltre, per quanto detto, possiamo concludere che per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte irriducibili, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} h & -h \\ -h & 1 \end{vmatrix} = h - h^2,$$
vediamo che per $0 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non vi sono circonferenze; per $h = 1$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $h < 0$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$.

4. Le quadriche contenenti p_1 hanno equazione:
$$x^2 - 2xy + y^2 - 2y + +1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecando con il piano contenente p_2 otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ (a + b)xz + cz^2 - 2x + dz + 1 = 0. \end{cases}$$

Questa conica coincide con p_2 se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che:

$$(a + b)xz + cz^2 - 2x + dz + 1 = k(z^2 - 2x + 1) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = k \\ -2 = -2k \\ d = 0 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ b = -a \\ c = 1 \\ d = 0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 1 + z(ax - ay + z) = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + axz - ayz + z^2 - 2y + 1 = 0.$$

5. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{a}{2} & -1 \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 1 - \frac{a^2}{4}$ e $|A| = 0$, possiamo dire che per $-2 < a < 2$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici e per $a < -2$ e $a > 2$ abbiamo dei paraboloidi ellittici. Invece, sia per $a = 2$ che per $a = -2$ abbiamo $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui in questi due casi abbiamo due cilindri.