Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 20 Febbraio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,-1,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,h,1,1)$, $w_1 = (h,1,-1,0)$, $w_2 = (2,h,-h,1)$ e $w_3 = (h,0,-4,-1)$, con $h \in \mathbb{R}$, e i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1,v_2,v_3)$ e $W = \mathscr{L}(w_1,w_2,w_3)$.

1. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $V = W$.

2. Sia $h = -1$ e sia $f\colon W \to W$ l'endomorfismo tale che:
$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1-k \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix},$$
con $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$ e $k \in \mathbb{R}$. Determinare una base di autovettori per f indipendente dal parametro k.

3. Sia $h = 2$ e sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che:
$$\begin{aligned} g(v_1) &= (2,2,-2,0) \\ g(v_2) &= (0,0,0,0) \\ g(v_3) &= (2,1,-1,0) \\ g(e_1) &= (0,2k,2k,0), \end{aligned}$$
con $k \in \mathbb{R}$. Mostrare che g è ben definito e studiare g al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$ e le loro equazioni cartesiane.

4. Calcolare $g^{-1}(v_1 + v_2 + e_1)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Osserviamo che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, per cui $\dim V = 3$. Determiniamone l'equazione cartesiana:
$$\begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2x+y-z+(3-h)t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + (h-3)t = 0\}$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} w_1 \in V &\Leftrightarrow 2h - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow h = 1 \\ w_2 \in V &\Leftrightarrow 4 - h - h + h - 3 = 0 \Leftrightarrow h = 1 \\ w_2 \in V &\Leftrightarrow 2h - 4 - h + 3 = 0 \Leftrightarrow h = 1. \end{aligned}$$

Dunque, possiamo dire che solo per $h = 1$ sia ha $W \subseteq V$. Per dire che per $h = 1$ $W = V$ dobbiamo fare vedere che $\dim W = \dim V = 3$. Sappiamo che per tale valore di h si ha:

$$W = \mathscr{L}\left((1,1,-1,0),(2,1,-1,1),(1,0,-4,-1)\right)$$

e che $\dim W$ è pari al rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

allora effettivamente per $h = 1$ $\dim W = \dim V = 3$ e, dunque, è per $h = 1$ che si ha $V = W$.

2. Osserviamo che, per $h = -1$, si ha $w_1 = (-1, 1, -1, 0)$, $w_2 = (2, -1, 1, 1)$ e $w_3 = (-1, 0, -4, -1)$. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 2 \\ -2 & 1-T & 1-k \\ 2 & 0 & k-T \end{vmatrix} = (1-T)[(k-T)^2 - 4].$$

Dunque, gli autovalori sono $T = 1$, $T = k+2$ e $T = k-2$. Essi sono tutti di molteplicità algebrica 1 per $k \neq 3, -1$, per cui f è certamente semplice e ha una base di autovettori per $k \neq 3, -1$. Cerchiamo tale base di autovettori in questi casi.

Sia $k \neq 3, -1$ e $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i_W$ e:

$$M^{\mathscr{B}}(f_1) = M^{\mathscr{B}}(f) - I = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1-k \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Essendo $m_1 = 1$, deve necessariamente essere $\dim V_1 = 1$ e, osservando la seconda colonna di $M^{\mathscr{B}}(f_1)$, concludiamo immediatamente che $V_1 = \mathscr{L}(w_2) = \mathscr{L}\left((2, -1, 1, 1)\right)$.

Sia $k \neq 3, -1$ e $T = k-2$. Sappiamo che $V_{k-2} = \operatorname{Ker} f_{k-2}$, dove $f_{k-2} = f - (k-2)i_W$ e:

$$M^{\mathscr{B}}(f_{k-2}) = M^{\mathscr{B}}(f) - (k-2)I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3-k & 1-k \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3-k & 3-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_{k-2} &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (a, b, c),\ 2a + 2c = 0,\ (3-k)b + (3-k)c = 0\} = \\ &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (-c, -c, c)\} = \mathscr{L}(-w_1 - w_2 + w_3) = \mathscr{L}\left((-2, 0, -4, -2)\right). \end{aligned}$$

Sia $k \neq 3, -1$ e $T = k+2$. Sappiamo che $V_{k+2} = \operatorname{Ker} f_{k+2}$, dove $f_{k+2} = f - (k+2)i_W$ e:

$$M^{\mathscr{B}}(f_{k+2}) = M^{\mathscr{B}}(f) - (k+2)I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1-k & 1-k \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1-k & -1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} V_{k+2} &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (a,b,c),\ -2a+2c=0,\ (-1-k)b+(-1-k)c=0\} = \\ &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (c,-c,c)\} = \mathscr{L}(w_1 - w_2 + w_3) = \mathscr{L}\left((-4,2,-6,-2)\right). \end{aligned}$$

Dunque, una base di autovettori per f nel caso $k \neq 3, -1$ è $[(2,-1,1,1),(-2,0,-4,-2),(-4,2,-6,-2)]$. Dal momento che in essa non compare il parametro k, essa è una base di autovettori anche per $k=3$ e $k=-1$ ed è la base di autovettori cercata.

3. Sia $h=2$. Dal momento che $e_1 \notin V$ (basta verificare che non verifica la sua equazione cartesiana) e che $[v_1, v_2, v_3]$ è una base di V, possiamo dire che v_1, v_2, v_3, e_1 sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$ e, dunque, essi individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Perciò, g è un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ ben definito in quanto assegna le immagini di una sua base.

   Sia:
$$\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, e_1] = [(1,1,-1,0),(0,1,1,0),(1,2,1,1),(1,0,0,0)].$$

   Si vede facilmente che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= 2v_1 \Rightarrow [g(v_1)]_{\mathscr{A}} = (2,0,0,0) \\ g(v_2) &= 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow [g(v_2)]_{\mathscr{A}} = (0,0,0,0) \\ g(v_3) &= v_1 + e_1 \Rightarrow [g(v_3)]_{\mathscr{A}} = (1,0,0,1) \\ g(e_1) &= 2kv_2 \Rightarrow [g(e_1)]_{\mathscr{A}} = (0,2k,0,0). \end{aligned}$$

   Dunque:
$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Si vede immediatamente che per $k \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathscr{A}}(g)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} g$ è data da $[(2,2,-2,0),(2,1,-1,0),(0,2k,2k,0)]$. Inoltre, è semplice vedere che:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2k & 2k & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

   per cui $\operatorname{Im} g = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$. Poi, $\dim Ker g = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e dalle assegnazioni vediamo che $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}(v_2) = \mathscr{L}\left((0,1,1,0)\right)$ e:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y-z & 0 & t \end{pmatrix},$$

   per cui $\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - z = t = 0\}$.

   Sia $k = 0$. In tal caso:
$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathscr{A}}(g)) = 2$ e una sua base è $[g(v_1), g(v_3)] = [(2,2,-2,0),(2,1,-1,0)]$. Cerchiamo le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y+z & t \end{pmatrix},$$

per cui $\operatorname{Im} g = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z=t=0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}(v_2, e_1) = \mathscr{L}((0,1,1,0),(1,0,0,0))$ e le sue equazioni cartesiane sono date da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-z & 0 & t \end{pmatrix},$$

cioè $\operatorname{Ker} g = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y-z=t=0\}$.

4. Osservando che $[v_1+v_2+e_1]_{\mathscr{A}} = (1,1,0,1)$, per calcolare la controimmagine occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Per $k \neq 0$ il sistema ha soluzioni:

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 2kd=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=1 \\ d=\dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Dunque, per $k \neq 0$:

$$g^{-1}(v_1+v_2+e_1) = \left\{ bv_2 + v_3 + \frac{1}{2k} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = = \left\{ \left(1+\frac{1}{2k}, b+2, b+1, 1\right) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Per $k=0$ il sistema è palesemente impossibile, per cui per $k=0$ $g^{-1}(v_1+v_2+e_1) = \emptyset$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i piani $\pi_1\colon 2x+2y-3z+1=0$, $\pi_2\colon 2x-3y+2z-1=0$ e $\pi_3\colon z-1=0$ e il punto $P=(-1,-1,-1)$. Determinare la retta r passante per P e parallela a π_1 e π_2 e la retta s simmetrica di r rispetto al piano π_3.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ di equazione:

$$(1-h)x^2 + 2hxy + y^2 - 2x - 1 = 0,$$

con $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Data la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} xy+y^2-1=0 \\ z=0, \end{cases}$$

determinare il cono Q contenente Γ e avente come vertice il punto $V=(1,1,-1)$. Stabilire la natura della conica $Q \cap \alpha$, essendo $\alpha\colon x+y=0$.

Soluzione

1. Se (l,m,n) sono parametri direttori di r, allora deve essere:

$$\begin{cases} 2l+2m-3n=0 \\ 2l-3m+2n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=\dfrac{m}{2} \\ n=m. \end{cases}$$

Dunque, $(1,2,2)$ sono parametri direttori di r e:

$$r\colon x+1=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow r\colon \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

La retta t passante per P e ortogonale a π_3 è $t\colon x+1=y+1=0$. Dunque, chiaramente il punto H intersezione di π_3 e t è $H=(-1,-1,1)$. Se $P'=(a,b,c)$ è il punto simmetrico di P rispetto a π_3, allora deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{2}=-1 \\ \dfrac{b-1}{2}=-1 \\ \dfrac{c-1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=3. \end{cases}$$

Dunque, $P'=(-1,-1,3)$. Cerchiamo il punto $Q=r\cap\pi_3$:

$$Q\colon \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y-z=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

Dunque, $Q=(0,1,1)$ e la retta cercata è la retta $P'Q$:

$$s=P'Q\colon\ -x=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}\Rightarrow s\colon \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y+z-2=0. \end{cases}$$

2. La conica che si ottiene per $h=\infty$ è la conica spezzata $x(x-2y)=0$. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1-h & h & -1 \\ h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1-h & h \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B|=h^2+h-2=(h-1)(h+2)$, per cui le altre due coniche spezzate si ottengono per $h=1$ e $h=-2$ ed hanno equazioni $(y-1)(2x+y+1)=0$ e $(x-y-1)(3x-y+1)=0$. Intersecando due delle tre coniche spezzate otteniamo i punti base $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,1)$ e $(-\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$.

Essendo $|A|=-h^2-h+1$, vediamo che per $h<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $h>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $h\neq 1,-2$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura l'iperbole equilatera per $h=2$; per $h=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle parabole; per $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<t<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ abbiamo delle ellissi, tra le quali vi è una circonferenza per $h=0$.

3. Il generico punto della conica Γ è $P=(\alpha,\beta,0)$, dove $\alpha\beta+\beta^2-1=0$. La retta PV ha equazioni:

$$PV\colon \frac{x-1}{\alpha-1}=\frac{y-1}{\beta-1}=z+1\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{x+z}{z+1} \\ \beta=\dfrac{y+z}{z+1}. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha\beta+\beta^2-1=0$ otteniamo l'equazione del cono:

$$\frac{x+z}{z+1}\cdot\frac{y+z}{z+1}+\left(\frac{y+z}{z+1}\right)^2-1=0\Rightarrow Q\colon (x+z)(y+z)+(y+z)^2-(z+1)^2=0.$$

Osserviamo subito che V non appartiene al piano $x+y=0$, per cui la conica $Q\cap\alpha$ è irriducibile. Per classificarla, determiniamo i suoi punti impropri:

$$\begin{cases} (x+z)(y+z)+(y+z)^2-(z+t)^2=0 \\ x=-y \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(2y+z)=0 \\ x=-y \\ t=0. \end{cases}$$

Dato che i punti impropri sono reali e distinti concludiamo che la conica sezione $Q\cap\alpha$ è un'iperbole.