Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Luglio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= kv_1 \\ f(v_2) &= v_2 \\ f(v_3) &= v_1 - v_2 + (k-1)v_3, \end{aligned}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale il vettore $v_1 + v_2 - v_3$ è autovettore per f e per tale valore di k determinare una base di autovettori per f.
3. Data $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(x,y,z) = (-x+2y-z, y, z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, sia $\varphi = f + g$. Calcolare $\varphi^{-1}(1,1,0)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
4. Nel caso $k = 2$, mostrare che φ è invertibile e calcolare una matrice associata a φ^{-1}.

Soluzione

1. È semplice vedere che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. È anche immediato vedere che:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$
La matrice è chiaramente ridotta di rango 3 per $k \neq 0, 1$, il che vuol dire per $k \neq 0, 1$ f è iniettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, e suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $k = 1$. In tal caso:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data dai vettori di componenti $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ rispetto a $\mathscr{A}$, cioè una base di $\operatorname{Im} f$ è $[v_1, v_2] = [(1,1,0),(0,1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\, a + c = 0,\, b - c = 0\} = \mathscr{L}(-v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}\left((0,1,2)\right).$$

Sia $k = 0$. In tal caso:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
per cui chiaramente $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data dai vettori di componenti $(0,1,0)$ e $(1,-1,-1)$ rispetto a $\mathscr{A}$, cioè una base di $\operatorname{Im} f$ è $[v_2, v_1 - v_2 - v_3] = [(0,1,1),(0,-1,-2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b = 0,\ c = 0\} = \mathscr{L}(v_1) = \mathscr{L}\left((1,1,0)\right).$$

2. Dato che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & -1 \\ 0 & 0 & k-1-T \end{vmatrix} = (k-T)(1-T)(k-1-T),$$
gli autovalori sono $k, k-1, 1$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $k \neq 1,2$, il che vuol dire che per $k \neq 1,2$ f è certamente semplice.

Sia $k = 1$. Gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 1$ e $m_1 = 2$. Deve necessariamente essere $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. f è semplice se e solo se si ha contemporaneamente $\dim V_0 = m_0 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$, per cui è sufficiente calcolare $\dim V_1$, dove $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e $M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I$:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}} f_1) = 2 = m_1$ e possiamo dire che per $k = 1$ f è semplice.

Sia $k = 2$. Gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Deve necessariamente essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. f è semplice se e solo se si ha contemporaneamente $\dim V_2 = m_2 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$, per cui è sufficiente calcolare $\dim V_1$, dove $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e $M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I$:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}} f_1) = 1 < 2 = m_1$ e possiamo dire che per $h = 1$ f non è semplice.

Per stabilire il valore di k per il quale $v_1 + v_2 - v_3$ è autovettore occorre calcolare $f(v_1 + v_2 - v_3)$. Sapendo che $[v_1 + v_2 - v_3]_{\mathscr{A}} = (1,1,-1)$, da:
$$M^{\mathscr{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ -k+1 \end{pmatrix}$$
vediamo che $[f(v_1 + v_2 - v_3)]_{\mathscr{A}} = (k-1, 2, 1-k)$, cioè $f(v_1 + v_2 - v_3) = (k-1)v_1 + 2v_2 + (1-k)v_3$ ed esso è autovettore se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:
$$f(v_1 + v_2 - v_3) = \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \Leftrightarrow \lambda(v_1 + v_2 - v_3) = (k-1)v_1 + 2v_2 + (1-k)v_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = k-1 \\ \lambda = 2 \\ -\lambda = 1-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ \lambda = 2, \end{cases}$$
dove è stato utilizzato il fatto che $[v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Dunque, deve essere $k = 3$, per il quale valore abbiamo gli autovettori $v_1 + v_2 - v_3 \in V_2$, $v_1 \in V_k = V_3$ (in quanto $f(v_1) = kv_1 = 3v_1$ per $k = 3$) e $v_2 \in V_1$ (in quanto $f(v_2) = v_2 = 1 \cdot v_2$). I vettori $v_1 + v_2 - v_3, v_1, v_2$ sono autovettori associati ad autovalori distinti, per cui sono linearmente indipendenti ed individuano, dunque, una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f per $k = 3$.

3. L'applicazione data è tale che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 \\ g(v_2) &= v_3 \\ g(v_3) &= v_2, \end{aligned}$$

per cui:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = M^{\mathscr{A}}(f) + M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $[(1,1,0)]_{\mathscr{A}} = (1,0,0)$, per calcolare $\varphi^{-1}((1,0,0))$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambiando } R_2 \text{ e } R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $k \neq -1, 1$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} (k+1)a + c = 1 \\ b + (k-1)c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{k+1} \\ b = 0 \\ c = 0, \end{cases}$$

per cui per $k \neq -1, 1$ si ha:

$$\varphi^{-1}((1,1,0)) = \left\{ \frac{1}{k+1} v_1 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, 0 \right). \right\}$$

Per $k = 1$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ b = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$\varphi^{-1}((1,1,0)) = \{ a v_1 + (1-2a) v_3 \in \mathbb{R}^3 \} = \{ (1-a, 1-a, 1-2a) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Per $k = -1$ il sistema è impossibile, per cui $\varphi^{-1}((1,1,0)) = \emptyset$.

4. Per $k = 2$ si ha:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathscr{A}}(\varphi)| = 3 \neq 0$, φ è invertibile e si ha:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi^{-1}) = \left(M^{\mathscr{A}}(\varphi) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i piani $\pi_1\colon x - 2y + z + 1 = 0$ e $\pi_2\colon 2x + y + 3z - 2 = 0$, il punto $P = (-2, 1, -1)$ e la retta
$$s\colon \begin{cases} y - z - 2 = 0 \\ x + 2 = 0. \end{cases}$$
Determinare la retta r passante per P e parallela ai piani π_1 e π_2. Mostrare che r e s non sono sghembe e determinare il piano che le contiene.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangente alla retta $t\colon x - y = z = 0$ in $A = (-1, -1, 0)$ e passanti per i punti $B = (1, -2, 0)$ e $C = (2, -1, 0)$.

3. Determinare la natura del paraboloide contenente la conica
$$\Gamma\colon \begin{cases} y^2 - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
e le rette
$$s_1\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s_2\colon \begin{cases} x = z \\ y = z. \end{cases}$$

Soluzione

1. La retta r è intersezione dei piani passanti per P e paralleli a π_1 e a π_2, per cui:
$$r\colon \begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 2x + y + 3z + 6 = 0. \end{cases}$$
È facile vedere che:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$
per cui le rette r e s non sono sghembe, ma complanari. Sia $Q = (-2, 2, 0) \in s$ un punto a piacere, $Q \notin r$. I piani contenenti r hanno equazione:
$$\lambda(x - 2y + z + 5) + \mu(2x + y + 3z + 6) = 0.$$
Imponendo il passaggio per Q troviamo $-\lambda + 4\mu = 0$, per cui ponendo $\lambda = 4$ e $\mu = 1$ troviamo il piano contenente r e s:
$$6x - 7y + 7z + 26 = 0.$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono solamente $t \cup BC$ e $AB \cup AC$, per cui il fascio di coniche ha equazione:
$$(x-y)(x-y-3) + h(y+1)(x+2y+3) = 0 \Rightarrow x^2 + (h-2)xy + (2h+1)y^2 + (h-3)x + (3+5h)y + 3h = 0.$$
Le coniche irriducibili del fascio si ottengono necessariamente solo per $h \neq 0$. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & 2h+1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 12h}{4},$$
vediamo che per $h = 12$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ una conica spezzata; per $0 < h < 12$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h < 0$ e $h > 12$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$.

3. Osserviamo subito che un paraboloide contenente almeno una retta reale è necessariamente un paraboloide iperbolico. Dunque, alla domanda è possibile rispondere senza determinare l'equazione del paraboloide in questione. Nel caso specifico, volendo determinare tale equazione si procede nel seguente modo. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$y^2 - x + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecando con la retta s_1 troviamo:

$$\begin{cases} y^2 - x + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2 + (a + b + d)z = 0 \\ x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

La retta s_1 è contenuta nella quadrica se $c = a + b + d = 0$. Analogamente, intersecando con la retta s_2 troviamo:

$$\begin{cases} y^2 - x + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b + c + 1)z^2 + (d - 1)z = 0 \\ x = z \\ y = z. \end{cases}$$

La retta s_2 è contenuta nella quadrica se $a + b + c + 1 = d - 1 = 0$. Dunque, deve essere:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + d = 0 \\ a + b + c + 1 = 0 \\ d - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 - a \\ c = 0 \\ d = 1. \end{cases}$$

Questo vuol dire che le quadriche contenenti la conica e le due rette date hanno equazione:

$$y^2 - x + z[ax + (-1 - a)y + 1] = 0 \Rightarrow y^2 + axz + (-1 - a)yz - x + z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1-a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{-1-a}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1-a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{-1-a}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|A| = -\dfrac{a^2}{4}$, per cui $|A| = 0$ solo per $a = 0$. Per tale valore si ha la quadrica di equazione:

$$y^2 - yz - x + z = 0,$$

per la quale si ha $|B| = \frac{1}{16} > 0$, il che vuol dire che la quadrica trovata è un paraboloide iperbolico.