

**Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) - Ingegneria REA**

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Luglio 2019

Durata della prova: tre ore.

È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ e l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(v_1) = (h + 1)v_1$$

$$f(v_2) = v_2$$

$$f(v_3) = v_1 - v_2 + hv_3,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale il vettore $v_1 + v_2 - v_3$ è autovettore per f e per tale valore di h determinare una base di autovettori per f .
3. Data $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z) = (-x + 2y - z, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sia $\varphi = f + g$. Calcolare $\varphi^{-1}(1, 1, 0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Nel caso $h = 1$, mostrare che φ è invertibile e calcolare una matrice associata a φ^{-1} .

Soluzione

1. È semplice vedere che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, per cui $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di \mathbb{R}^3 . È anche immediato vedere che:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

La matrice è chiaramente ridotta di rango 3 per $h \neq 0, -1$, il che vuol dire per $h \neq 0, -1$ f è iniettiva, per cui $\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\}$, e suriettiva, per cui $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \text{Im } f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data dai vettori di componenti $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ rispetto a \mathcal{A} , cioè una base di $\text{Im } f$ è $[v_1, v_2] = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$. Inoltre, $\dim \text{Ker } f = 3 - \dim \text{Im } f = 1$ e:

$$\text{Ker } f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), a + c = 0, b - c = 0\} = \mathcal{L}(-v_1 + v_2 + v_3) = \mathcal{L}((0, 1, 2)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui chiaramente $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$ e una sua base è data dai vettori di componenti $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, -1)$ rispetto a \mathcal{A} , cioè una base di $\operatorname{Im} f$ è $[v_2, v_1 - v_2 - v_3] = [(0, 1, 1), (0, -1, -2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a, b, c), b = 0, c = 0\} = \mathcal{L}(v_1) = \mathcal{L}((1, 1, 0)).$$

2. Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h+1-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & -1 \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h+1-T)(1-T)(h-T),$$

gli autovalori sono $h+1, h, 1$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 1$, il che vuol dire che per $h \neq 0, 1$ f è certamente semplice.

Sia $h = 0$. Gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 1$ e $m_1 = 2$. Deve necessariamente essere $\dim V_0 = m_0 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. f è semplice se e solo se si ha contemporaneamente $\dim V_0 = m_0 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$, per cui è sufficiente calcolare $\dim V_1$, dove $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e $M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I$:

$$M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathcal{A}} f_1) = 2 = m_1$ e possiamo dire che per $h = 0$ f è semplice.

Sia $h = 1$. Gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Deve necessariamente essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. f è semplice se e solo se si ha contemporaneamente $\dim V_2 = m_2 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 2$, per cui è sufficiente calcolare $\dim V_1$, dove $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e $M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I$:

$$M^{\mathcal{A}}(f_1) = M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathcal{A}} f_1) = 1 < 2 = m_1$ e possiamo dire che per $h = 1$ f non è semplice.

Per stabilire il valore di h per il quale $v_1 + v_2 - v_3$ è autovettore occorre calcolare $f(v_1 + v_2 - v_3)$. Sapendo che $[v_1 + v_2 - v_3]_{\mathcal{A}} = (1, 1, -1)$, da:

$$M^{\mathcal{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ -h \end{pmatrix}$$

vediamo che $[f(v_1 + v_2 - v_3)]_{\mathcal{A}} = (h, 2, -h)$, cioè $f(v_1 + v_2 - v_3) = hv_1 + 2v_2 - hv_3$ ed esso è autovettore se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(v_1 + v_2 - v_3) = \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \Leftrightarrow \lambda(v_1 + v_2 - v_3) = hv_1 + 2v_2 - hv_3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = h \\ \lambda = 2 \\ -\lambda = -h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ \lambda = 2, \end{cases}$$

dove è stato utilizzato il fatto che $[v_1, v_2, v_3]$ è una base di \mathbb{R}^3 . Dunque, deve essere $h = 2$, per il quale valore abbiamo gli autovettori $v_1 + v_2 - v_3 \in V_2$, $v_1 \in V_{h+1} = V_3$ (in quanto $f(v_1) = (h+1)v_1 = 3v_1$ per $h = 2$) e $v_2 \in V_1$ (in quanto $f(v_2) = v_2 = 1 \cdot v_2$). I vettori $v_1 + v_2 - v_3, v_1, v_2$ sono autovettori associati ad autovalori distinti, per cui sono linearmente indipendenti ed individuano, dunque, una base di \mathbb{R}^3 di autovettori per f per $h = 2$.

3. L'applicazione data è tale che:

$$\begin{aligned}g(v_1) &= v_1 \\g(v_2) &= v_3 \\g(v_3) &= v_2,\end{aligned}$$

per cui:

$$M^{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi) = M^{\mathcal{A}}(f) + M^{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} h+2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Dato che $[(1, 1, 0)]_{\mathcal{A}} = (1, 0, 0)$, per calcolare $\varphi^{-1}((1, 0, 0))$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h+2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{scambiando } R_2 \text{ e } R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} h+2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dunque, per $h \neq 0, -2$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} (h+2)a + c = 1 \\ b + hc = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{h+2} \\ b = 0 \\ c = 0, \end{cases}$$

per cui per $h \neq 0, -2$ si ha:

$$\varphi^{-1}((1, 1, 0)) = \left\{ \frac{1}{h+2} v_1 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{h+2}, \frac{1}{h+2}, 0 \right) \right\}.$$

Per $h = 0$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

per cui abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ b = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$\varphi^{-1}((1, 1, 0)) = \{av_1 + (1-2a)v_3 \in \mathbb{R}^3\} = \{(1-a, 1-a, 1-2a) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Per $h = -2$ il sistema è impossibile, per cui $\varphi^{-1}((1, 1, 0)) = \emptyset$.

4. Per $h = 1$ si ha:

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M^{\mathcal{A}}(\varphi)| = 3 \neq 0$, φ è invertibile e si ha:

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi^{-1}) = (M^{\mathcal{A}}(\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i piani $\pi_1: 2x - y - z - 1 = 0$ e $\pi_2: x + 3y + 2z - 2 = 0$, il punto $P = (1, -1, -2)$ e la retta

$$s: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z + 2 = 0. \end{cases}$$

Determinare la retta r passante per P e parallela ai piani π_1 e π_2 . Mostrare che r e s non sono sghembe e determinare il piano che le contiene.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangente alla retta $t: x - y = z = 0$ in $A = (1, 1, 0)$ e passanti per i punti $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (-2, 1, 0)$.
3. Determinare la natura del paraboloido contenente la conica

$$\Gamma: \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e le rette

$$s_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s_2: \begin{cases} x = z \\ y = z. \end{cases}$$

Soluzione

1. La retta r è intersezione dei piani passanti per P e paralleli a π_1 e a π_2 , per cui:

$$r: \begin{cases} 2x - y - z - 5 = 0 \\ x + 3y + 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

È facile vedere che:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

per cui le rette r e s non sono sghembe, ma complanari. Sia $Q = (2, 0, -2) \in s$ un punto a piacere, $Q \notin r$. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(2x - y - z - 5) + \mu(x + 3y + 2z + 6) = 0.$$

Imponendo il passaggio per Q troviamo $\lambda + 4\mu = 0$, per cui ponendo $\lambda = 4$ e $\mu = -1$ troviamo il piano contenente r e s :

$$7x - 7y - 6z - 26 = 0.$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono solamente $t \cup BC$ e $AB \cup AC$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$(x - y)(x - y + 3) + h(y - 1)(x + 2y - 3) = 0 \Rightarrow x^2 + (h - 2)xy + (2h + 1)y^2 + (3 - h)x - (3 + 5h)y + 3h = 0.$$

Le coniche irriducibili del fascio si ottengono necessariamente solo per $h \neq 0$. Da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h-2}{2} \\ \frac{h-2}{2} & 2h+1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 12h}{4},$$

vediamo che per $h = 12$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ una conica spezzata; per $0 < h < 12$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non figurano circonferenze; per $h < 0$ e $h > 12$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -1$.

3. Osserviamo subito che un paraboloide contenente almeno una retta reale è necessariamente un paraboloide iperbolico. Dunque, alla domanda è possibile rispondere senza determinare l'equazione del paraboloide in questione. Nel caso specifico, volendo determinare tale equazione si procede nel seguente modo. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$y - x^2 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecando con la retta s_1 troviamo:

$$\begin{cases} y - x^2 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2 + (a + b + d)z = 0 \\ x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

La retta s_1 è contenuta nella quadrica se $c = a + b + d = 0$. Analogamente, intersecando con la retta s_2 troviamo:

$$\begin{cases} y - x^2 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b + c - 1)z^2 + (d + 1)z = 0 \\ x = z \\ y = z. \end{cases}$$

La retta s_2 è contenuta nella quadrica se $a + b + c - 1 = d + 1 = 0$. Dunque, deve essere:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + d = 0 \\ a + b + c - 1 = 0 \\ d + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ c = 0 \\ d = -1. \end{cases}$$

Questo vuol dire che le quadriche contenenti la conica e le due rette date hanno equazione:

$$y - x^2 + z[ax + (1 - a)y - 1] = 0 \Rightarrow -x^2 + axz + (1 - a)yz + y - z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{1-a}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{1-a}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|A| = \frac{(1-a)^2}{4}$, per cui $|A| = 0$ solo per $a = 1$. Per tale valore si ha la quadrica di equazione:

$$-x^2 + xz + y - z = 0,$$

per la quale si ha $|B| = \frac{1}{16} > 0$, il che vuol dire che la quadrica trovata è un paraboloide iperbolico.