Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Novembre 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ e $v_3 = (2,0,1,-1)$, e il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. Si consideri l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,1,-2,-3)) \\ f(v_2) &= (2,1,-1,-3) \\ f(v_3) &= (-2,0,-1,1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori.
2. Determinare l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, la cui restrizione a V induce f, tale che $\varphi(1,1,1,1) = (h,h,h,h)$, con $h \in \mathbb{R}$.
3. Studiare φ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ (**si sconsiglia** di utilizzare la matrice associata alla base canonica di $\mathbb{R}^4$).
4. Determinare $\varphi^{-1}(2,2,3,2)$ al variare del parametro reale h.
5. Studiare la semplicità di φ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dal momento che la seguente matrice ha rango 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, per cui $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Da:

$$\begin{aligned} [f(v_1)]_{\mathscr{A}} &= (-7,8,4) \\ [f(v_2)]_{\mathscr{A}} &= (-6,7,4) \\ [f(v_3)]_{\mathscr{A}} &= (0,0,-1). \end{aligned}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -7-T & -6 & 0 \\ 8 & 7-T & 0 \\ 4 & 4 & -1-T \end{vmatrix} = (-1-T)(T^2-1).$$

Dunque, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 1$ e $m_{-1} = 2$. Certamente si ha $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_2$, per cui possiamo affermare che per verificare che f è semplice è sufficiente verificare che $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_{-1}$, con $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 1$, per cui $\dim V_{-1} = \dim V - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 2 = m_{-1}$. Ciò vuol dire che f è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Da quanto appena ottenuto vediamo che:

$$\begin{aligned} V_{-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -6a - 6b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,-a,c)\} = \\ = \mathscr{L}(v_1 - v_2, v_3) = \mathscr{L}((1,0,1,0),(2,0,1,-1)). \end{aligned}$$

Analogamente possiamo determinare l'autospazio V_1, sapendo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$ e che $f_1 = f - i$:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Perciò:

$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -8a - 6b = 0,\ b - 2c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-\tfrac{3}{4}b, b, \tfrac{1}{2}b)\} = \\ = \mathscr{L}(-3v_1 + 4v_2 + 2v_3) = \mathscr{L}((1,1,0,-1)). \end{aligned}$$

Concludiamo, allora, che una base di autovettori è $[(1,0,1,0),(2,0,1,-1),(1,1,0,-1)]$.

2. Osserviamo che $(1,1,1,1) \notin V$, in quanto la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4. Quindi, l'endomorfismo φ cercato è tale che $\varphi(v) = f(v)$ per ogni $v \in V$ e $\varphi(1,1,1,1) = (h,h,h,h)$. Da quanto ottenuto nel punto precedente, possiamo dunque affermare che:

$$\begin{aligned} &\varphi(1,0,1,0) = f(1,0,1,0) = -1 \cdot (1,0,1,0) = (-1,0,-1,0) \\ &\varphi(2,0,1,-1) = f(2,0,1,-1) = -1 \cdot (2,0,1,-1) = (-2,0,-1,1) \\ &\varphi(1,1,0,-1) = f(1,1,0,-1) = 1 \cdot (1,1,0,-1) = (1,1,0,-1) \\ &\varphi(1,1,1,1) = (h,h,h,h). \end{aligned}$$

Per quanto detto, dato che $[(1,0,1,0),(2,0,1,-1),(1,1,0,-1)]$ è una base di V, ne segue che $\mathscr{B} = [(1,0,1,0),(2,0,1,-1),(1,1,0,-1),(1,1,1,1)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e le assegnazioni precedenti determinano, perciò, l'endomorfismo φ.

3. Da:

$$\begin{aligned} &\varphi(1,0,1,0) = f(1,0,1,0) = -1 \cdot (1,0,1,0) = (-1,0,-1,0) \\ &\varphi(2,0,1,-1) = f(2,0,1,-1) = -1 \cdot (2,0,1,-1) = (-2,0,-1,1) \\ &\varphi(1,1,0,-1) = f(1,1,0,-1) = 1 \cdot (1,1,0,-1) = (1,1,0,-1) \\ &\varphi(1,1,1,1) = (h,h,h,h) = h \cdot (1,1,1,1). \end{aligned}$$

vediamo che:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0$ φ è un isomorfismo, per cui è iniettiva, suriettiva, $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^4$. Per $h = 0$ abbiamo:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im}\varphi = \rho(M^{\mathscr{B}}(\varphi) = 3$ e $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 4 - \dim \operatorname{Im}\varphi = 1$. Inoltre, si vede subito che $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}((1,0,1,0),(2,0,1,-1),(1,1,0,-1)) = V$ e $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{L}((1,1,1,1))$.

4. Dato che $[(2,2,3,2)]_{\mathscr{B}} = (4,-2,1,1)$, per calcolare $\varphi^{-1}(2,2,3,2)$ occorre risolvere il seguente sistema lineare:

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h & 1 \end{array}\right).$$

È evidente che per $h = 0$, il sistema è impossibile, il che vuol dire che per $h \neq 0$ si ha $\varphi^{-1}(2,2,3,2) = \emptyset$. Per $h \neq 0$ abbiamo:

$$\begin{cases} -a = 4 \\ -b = -2 \\ c = 1 \\ hd = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = \dfrac{1}{h}. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 0$:

$$\varphi^{-1}(2,2,3,2) = \{-4(1,0,1,0) + 2(2,0,1,-1) + (1,1,0,-1) + \tfrac{1}{h}(1,1,1,1)\} = \\ = \{(1 + \tfrac{1}{h}, 1 + \tfrac{1}{h}, -2 + \tfrac{1}{h}, -3 + \tfrac{1}{h})\}.$$

5. Dato che:

$$\begin{aligned} &\varphi(1,0,1,0) = -1 \cdot (1,0,1,0) = (-1,0,-1,0) \\ &\varphi(2,0,1,-1) = -1 \cdot (2,0,1,-1) = (-2,0,-1,1) \\ &\varphi(1,1,0,-1) = 1 \cdot (1,1,0,-1) = (1,1,0,-1) \\ &\varphi(1,1,1,1) = (h,h,h,h) = h \cdot (1,1,1,1), \end{aligned}$$

vediamo che $\mathscr{B} = [(1,0,1,0),(2,0,1,-1),(1,1,0,-1),(1,1,1,1)]$ è una base di autovettori per φ per ogni $h \in \mathbb{R}$, il che vuol dire che φ è semplice per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Si considerino le rette r e s di equazioni, rispettivamente:

$$r\colon \begin{cases} y - z = 0 \\ \lambda x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + y - \lambda = 0, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali le rette sono complanari, determinando anche il piano che le contiene.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ che sono tangenti nell'origine all'asse $\vec{x}$ e nel punto $(1,1,0)$ alla retta di equazioni $z = x + y - 2 = 0$.

3. Data la conica
$$\Gamma\colon\ \begin{cases} x^2-4xy-y^2+4y=0 \\ z=0 \end{cases},$$
determinare e studiare le quadriche che contengono Γ e l'asse $\vec{z}$ e che passano per il punto $(1,0,1,0)$.

Soluzione

1. Da:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0$$
vediamo che le rette sono complanari per $\lambda=1$ e $\lambda=-1$.

Sia $\lambda=1$. I piani contenenti r hanno equazione:
$$h(y-z)+k(x-y-1)=0.$$
Prendiamo il punto $S=(2,-1,-1)\in s$ e, imponendo il passaggio per tale punto, otteniamo $k=0$. Ciò vuol dire che per $\lambda=1$ il piano che contiene le due rette ha equazione $y-z=0$.

Sia $\lambda=-1$. In tal caso:
$$r\colon\ \begin{cases} y-z=0 \\ -x-y-1=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon\ \begin{cases} x+z-1=0 \\ x+y+1=0, \end{cases}$$
da cui si evince immediatamente che per $\lambda=-1$ il piano che contiene le due rette ha equazione $x+y+1=0$.

2. Il fascio di coniche ha equazione:
$$y(x+y-2)+h(x-y)^2=0 \Rightarrow hx^2+(1-2h)xy+(h+1)y^2-2y=0.$$
Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Ciò vuol dire che per $h\neq 0$ le coniche sono tutte irriducibili, mentre per $h=0$ abbiamo una conica spezzata in due rette reali e distinte. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} h & \dfrac{1-2h}{2} \\ \dfrac{1-2h}{2} & h+1 \end{vmatrix} = \frac{8h-1}{4},$$
vediamo che per $h>\frac{1}{8}$ abbiamo delle ellissi, naturalmente tutte reali, tra le quali non vi sono circonferenze; per $h=\frac{1}{8}$ abbiamo una parabola; per $h<\frac{1}{8}$ abbiamo delle iperboli, tra le quali quella equilatera si ottiene per $h=-\frac{1}{2}$, in quanto $\mathrm{Tr}(A)=2h+1$.

3. La generica quadrica contenente la conica Γ ha equazione:
$$x^2-4xy-y^2+4y+z(ax+by+cz+d)=0.$$
Intersecandola con l'asse $\vec{z}$ abbiamo:
$$\begin{cases} x^2-4xy-y^2+4y+z(ax+by+cz+d)=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cz^2+dz=0 \\ x=0 \\ y=0. \end{cases}$$
La quadrica contiene l'asse $\vec{z}$ se $c=d=0$. Imponendo, poi, il passaggio per il punto $P=(1,0,1,0)$ abbiamo:
$$x^2-4xy-y^2+4yt+z(ax+by)=0 \Rightarrow 1+a=0.$$

Dunque, le quadriche cercate hanno equazione:

$$x^2 - 4xy - y^2 + 4y + z(-x + by) = 0 \Rightarrow x^2 - 4xy - y^2 - xz + byz + 4y = 0.$$

Da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & \frac{b}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{b}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{b}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = 1$ e $|A| = \frac{-b^2+4b+1}{4}$. Essendo le quadriche necessariamente reali, concludiamo che per $b = 2 \pm \sqrt{5}$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici, mentre per $b \neq 2 \pm \sqrt{5}$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici.