CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria** - 12 Giugno 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito D

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $P = (0, 1, 0)$, il piano $\alpha\colon\ x - 2y + z - 2 = 0$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il piano π passante per P e parallelo alle rette r e s;

   (b) la proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti all'asse $\vec{x}$ nel punto $A = (2, 0, 0)$ e alla retta $p\colon\ x - y = z = 0$ nel punto $B = (1, 1, 0)$. Determinare la conica Γ del fascio passante per il punto $P_\infty = (3, -1, 0, 0)$, specificandone la natura e determinandone il centro di simmetria.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$(k + 1)x^2 + ky^2 - 2xy - 2xz + 2x - 2y - 1 = 0.$$

   Ove possibile, determinarne il vertice e, in tal caso, trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la sezione della quadrica con il piano $y + z - h = 0$ risulta irriducibile.

Soluzione

1. La retta r e la retta s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 1, -1)$ e $(5, -1, -3)$. Un piano ortogonale a un vettore di componenti (a, b, c) è parallelo a r e s se:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 5a - b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \\ c = 3b. \end{cases}$$

   Dunque, il piano π è ortogonale al vettore di componenti $(2, 1, 3)$ ed esso ha, perciò, equazione $2x + y + 3z - 1 = 0$.

   La retta proiezione ortogonale di r è intersezione di α con il piano β contenente r e ortogonale ad α. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - y - 1) + \mu(y + z - 2) = 0 \Rightarrow \lambda x + (-\lambda + \mu)y + \mu z - \lambda - 2\mu = 0.$$

   Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda, -\lambda + \mu, \mu)$ e $(1, -2, 1)$ siano ortogonali, cioè deve essere $\mu = 3\lambda$, per cui $\beta\colon\ x + 2y + 3z - 7 = 0$ e la proiezione ortogonale di r su π è la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z - 7 = 0. \end{cases}$$

2. La retta AB ha equazione $x+y-2=0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$hy(x-y)+(x+y-2)^2=0 \Rightarrow x^2+(h+2)xy+(1-h)y^2-4x-4y+4=0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, concludiamo subito che per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte necessariamente irriducibili. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h+2}{2} \\ \dfrac{h+2}{2} & 1-h \end{vmatrix} = \frac{-h^2-8h}{4},$$

vediamo che per $-8 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h=0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h=-8$ abbiamo una parabola; per $h<-8$ e $h>0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali vi è una equilatera per $h=2$, poiché $\mathrm{Tr}(A)=2-h$.

Imponiamo il passaggio per il punto improprio P_∞:

$$x^2+(h+2)xy+(1-h)y^2-4xt-4yt+4t^2=0 \Rightarrow -4h+4=0 \Rightarrow h=1.$$

Dunque, la conica cercata ha equazione:

$$x^2+3xy-4x-4y+4=0$$

ed essendo stata ottenuta per $h=1>0$, per quanto detto in precedenza, è un'iperbole non equilatera. La matrice associata a tale conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3}{2} & -2 \\ \dfrac{3}{2} & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il centro di simmetria si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y-2=0 \\ \dfrac{3}{2}x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto di coordinate $(\frac{4}{3}, \frac{4}{9})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & -1 \\ -1 & k & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B|=k+1$ e $|A|=-k$, concludiamo subito che per $k=-1$ abbiamo un cono e per $k=0$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Inoltre, essendo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k+1-T & -1 & -1 \\ -1 & k-T & 0 \\ -1 & 0 & -T \end{vmatrix} = -T^3+(2k+1)T^2+(-k^2-k+2)T-k,$$

vediamo che abbiamo degli ellissoidi se:

$$\begin{cases} 2k+1>0 \\ -k^2-k+2<0 \\ -k>0 \end{cases} \quad \text{oppure se} \quad \begin{cases} 2k+1<0 \\ -k^2-k+2<0 \\ -k<0. \end{cases}$$

Si vede subito che i due sistemi sono impossibili, per cui le quadriche, per $k \neq 0, -1$, sono tutte iperboloidi. In particolare, per $k > -1$, $k \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $k < -1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

Sia $k = -1$. Cerchiamo il vertice del cono. Esso ha equazione:

$$-y^2 - 2xy - 2xz + 2x - 2y - 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vertice si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -y - z + 1 = 0 \\ -x - y - 1 = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è il punto $V = (0, -1, 2)$. I piani che incontrano il cono in una conica irriducibile sono quelli per i quali non passa il vertice, per cui deve essere $-1 + 2 - h \neq 0$, cioè $h \neq 1$.