CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria** - 12 Giugno 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito C

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $P = (0, 0, 1)$, il piano $\alpha\colon x - y - 2z - 2 = 0$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il piano π passante per P e parallelo alle rette r e s;

   (b) la proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti all'asse $\vec{y}$ nel punto $A = (0, -2, 0)$ e alla retta $p\colon x + y = z = 0$ nel punto $B = (1, -1, 0)$. Determinare la conica Γ del fascio passante per il punto $P_\infty = (1, 3, 0, 0)$, specificandone la natura e determinandone il centro di simmetria.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hy^2 + (h-1)z^2 - 2xy - 2yz + 2y - 2z - 1 = 0.$$

   Ove possibile, determinarne il vertice e, in tal caso, trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la sezione della quadrica con il piano $x + z - k = 0$ risulta irriducibile.

Soluzione

1. La retta r e la retta s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 1, 1)$ e $(5, 3, -1)$. Un piano ortogonale a un vettore di componenti (a, b, c) è parallelo a r e s se:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 5a + 3b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{3}{2}a \\ c = \dfrac{1}{2}a. \end{cases}$$

   Dunque, il piano π è ortogonale al vettore di componenti $(2, -3, 1)$ ed esso ha, perciò, equazione $2x - 3y + z - 1 = 0$.

   La retta proiezione ortogonale di r è intersezione di α con il piano β contenente r e ortogonale ad α. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(y - z + 2) + \mu(x - z - 1) = 0 \Rightarrow \mu x + \lambda y + (-\lambda - \mu)z + 2\lambda - \mu = 0.$$

   Vogliamo che i vettori di componenti $(\mu, \lambda, -\lambda - \mu)$ e $(1, -1, -2)$ siano ortogonali, cioè deve essere $\lambda = -3\mu$, per cui $\beta\colon x - 3y + 2z - 7 = 0$ e la proiezione ortogonale di r su π è la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x - y - 2z - 2 = 0 \\ x - 3y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

2. La retta AB ha equazione $x - y - 2 = 0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$hx(x+y) + (x-y-2)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 + (h-2)xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, concludiamo subito che per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte necessariamente irriducibili. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2+8h}{4},$$

vediamo che per $0 < h < 8$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h = 8$ abbiamo una parabola; per $h < 0$ e $h > 8$ abbiamo delle iperboli, tra le quali vi è una equilatera per $h = -2$, poiché $\mathrm{Tr}(A) = h + 2$.

Imponiamo il passaggio per il punto improprio P_∞:

$$(h+1)x^2 + (h-2)xy + y^2 - 4xt + 4yt + 4t^2 = 0 \Rightarrow 4h + 4 = 0 \Rightarrow h = -1.$$

Dunque, la conica cercata ha equazione:

$$-3xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$$

ed essendo stata ottenuta per $h = -1 < 0$, per quanto detto in precedenza, è un'iperbole non equilatera. La matrice associata a tale conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{3}{2} & -2 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il centro di simmetria si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2}y - 2 = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{9} \\ y = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto di coordinate $(\frac{4}{9}, -\frac{4}{3})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & h & -1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & h & -1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = h$ e $|A| = 1 - h$, concludiamo subito che per $h = 0$ abbiamo un cono e per $h = 1$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Inoltre, essendo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -T & -1 & 0 \\ -1 & h-T & -1 \\ 0 & -1 & h-1-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h-1)T^2 + (-h^2+h+2)T + 1 - h,$$

vediamo che abbiamo degli ellissoidi se:

$$\begin{cases} 2h - 1 > 0 \\ -h^2 + h + 2 < 0 \\ 1 - h > 0 \end{cases} \quad \text{oppure se} \quad \begin{cases} 2h - 1 < 0 \\ -h^2 + h + 2 < 0 \\ 1 - h < 0. \end{cases}$$

Si vede subito che i due sistemi sono impossibili, per cui le quadriche, per $h \neq 0, 1$, sono tutte iperboloidi. In particolare, per $h > 0, h \neq 1$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

Sia $h = 0$. Cerchiamo il vertice del cono. Esso ha equazione:

$$-z^2 - 2xy - 2yz + 2y - 2z - 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vertice si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -x - z + 1 = 0 \\ -z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è il punto $V = (2, 0, -1)$. I piani che incontrano il cono in una conica irriducibile sono quelli per i quali non passa il vertice, per cui deve essere $2 - 1 - k \neq 0$, cioè $k \neq 1$.