CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria** - 12 Giugno 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $P = (0, 1, 0)$, il piano $\alpha\colon x + 2y - z + 2 = 0$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il piano π passante per P e parallelo alle rette r e s;

   (b) la proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti all'asse $\vec{y}$ nel punto $A = (0, 1, 0)$ e alla retta $p\colon x + y = z = 0$ nel punto $B = (-2, 2, 0)$. Determinare la conica Γ del fascio passante per il punto $P_\infty = (4, -3, 0, 0)$, specificandone la natura e determinandone il centro di simmetria.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$kx^2 + (k-1)y^2 + 2xy + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

   Ove possibile, determinarne il vertice e, in tal caso, trovare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la sezione della quadrica con il piano $x + z + h = 0$ risulta irriducibile.

Soluzione

1. La retta r e la retta s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 1, 1)$ e $(3, -1, 5)$. Un piano ortogonale a un vettore di componenti (a, b, c) è parallelo a r e s se:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a - b + 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3b \\ \\ c = 2b. \end{cases}$$

   Dunque, il piano π è ortogonale al vettore di componenti $(3, -1, -2)$ ed esso ha, perciò, equazione $3x - y - 2z + 1 = 0$.

   La retta proiezione ortogonale di r è intersezione di α con il piano β contenente r e ortogonale ad α. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - y + 2) + \mu(y - z + 1) = 0 \Rightarrow \lambda x + (-\lambda + \mu)y - \mu z + 2\lambda + \mu = 0.$$

   Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda, -\lambda + \mu, -\mu)$ e $(1, 2, -1)$ siano ortogonali, cioè deve essere $\lambda = 3\mu$, per cui $\beta\colon 3x - 2y - z + 7 = 0$ e la proiezione ortogonale di r su π è la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

2. La retta AB ha equazione $x+2y-2=0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$hx(x+y)+(x+2y-2)^2=0 \Rightarrow (h+1)x^2+4y^2+(h+4)xy-4x-8y+4=0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, concludiamo subito che per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte necessariamente irriducibili. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & \dfrac{h+4}{2} \\ \dfrac{h+4}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{-h^2+8h}{4},$$

vediamo che per $0<h<8$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h=0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h=8$ abbiamo una parabola; per $h<0$ e $h>8$ abbiamo delle iperboli, tra le quali vi è una equilatera per $h=-5$, poiché $\mathrm{Tr}(A)=h+5$.

Imponiamo il passaggio per il punto improprio P_∞:

$$(h+1)x^2+4y^2+(h+4)xy-4xt-8yt+4t^2=0 \Rightarrow 4h+4=0 \Rightarrow h=-1.$$

Dunque, la conica cercata ha equazione:

$$3xy+4y^2-4x-8y+4=0$$

ed essendo stata ottenuta per $h=-1<0$, per quanto detto in precedenza, è un'iperbole non equilatera. La matrice associata a tale conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{3}{2} & -2 \\ \dfrac{3}{2} & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

e il centro di simmetria si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}y-2=0 \\ \dfrac{3}{2}x+4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{9} \\ y=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto di coordinate $(-\frac{8}{9},\frac{4}{3})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B|=1-k$ e $|A|=-k$, concludiamo subito che per $k=1$ abbiamo un cono e per $k=0$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Inoltre, essendo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k-T & 1 & 0 \\ 1 & k-1-T & 1 \\ 0 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3+(2k-1)T^2+(-k^2+k+2)T-k,$$

vediamo che abbiamo degli ellissoidi se:

$$\begin{cases} 2k-1>0 \\ -k^2+k+2<0 \\ -k>0 \end{cases} \quad \text{oppure se} \quad \begin{cases} 2k-1<0 \\ -k^2+k+2<0 \\ -k<0. \end{cases}$$

Si vede subito che i due sistemi sono impossibili, per cui le quadriche, per $k \neq 0, 1$, sono tutte iperboloidi. In particolare, per $k < 1$, $k \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $k > 1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

Sia $k = 1$. Cerchiamo il vertice del cono. Esso ha equazione:

$$x^2 + 2xy + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vertice si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -y + z - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è il punto $V = (-1, 0, 2)$. I piani che incontrano il cono in una conica irriducibile sono quelli per i quali non passa il vertice, per cui deve essere $-1 + 2 + h \neq 0$, cioè $h \neq -1$.