CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria** - 12 Giugno 2019

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $P = (1, 0, 0)$, il piano $\alpha\colon 2x - y + z + 2 = 0$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il piano π passante per P e parallelo alle rette r e s;

   (b) la proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti all'asse $\vec{x}$ nel punto $A = (1, 0, 0)$ e alla retta $p\colon x - y = z = 0$ nel punto $B = (2, 2, 0)$. Determinare la conica Γ del fascio passante per il punto $P_\infty = (3, 4, 0, 0)$, specificandone la natura e determinandone il centro di simmetria.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2xy + 2xz + (h+1)z^2 - 2x + 2z + 1 = 0.$$

   Ove possibile, determinarne il vertice e, in tal caso, trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la sezione della quadrica con il piano $y + z + k = 0$ risulta irriducibile.

Soluzione

1. La retta r e la retta s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 1, 1)$ e $(1, -5, -3)$. Un piano ortogonale a un vettore di componenti (a, b, c) è parallelo a r e s se:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - 5b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}b \\ c = -\dfrac{3}{2}b. \end{cases}$$

   Dunque, il piano π è ortogonale al vettore di componenti $(1, 2, -3)$ ed esso ha, perciò, equazione $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

   La retta proiezione ortogonale di r è intersezione di α con il piano β contenente r e ortogonale ad α. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - y + 1) + \mu(x - z - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda + \mu)x - \lambda y - \mu z + \lambda - 2\mu = 0.$$

   Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda + \mu, -\lambda, -\mu)$ e $(2, -1, 1)$ siano ortogonali, cioè deve essere $\mu = -3\lambda$, per cui $\beta\colon 2x + y - 3z - 7 = 0$ e la proiezione ortogonale di r su π è la retta di equazioni:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z - 7 = 0. \end{cases}$$

2. La retta AB ha equazione $2x - y - 2 = 0$, per cui il fascio di coniche ha equazione:

$$hy(x-y) + (2x-y-2)^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + (1-h)y^2 + (h-4)xy - 8x + 4y + 4 = 0.$$

Dato che le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, concludiamo subito che per $h \neq 0$ le coniche del fascio sono tutte necessariamente irriducibili. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & \dfrac{h-4}{2} \\ \dfrac{h-4}{2} & 1-h \end{vmatrix} = -\frac{h^2+8h}{4},$$

vediamo che per $-8 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali, tra le quali non figurano circonferenze; per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h = -8$ abbiamo una parabola; per $h < -8$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali vi è una equilatera per $h = 5$, poiché $\mathrm{Tr}(A) = 5 - h$.

Imponiamo il passaggio per il punto improprio P_∞:

$$4x^2 + (1-h)y^2 + (h-4)xy - 8xt + 4yt + 4t^2 = 0 \Rightarrow -4h + 4 = 0 \Rightarrow h = 1.$$

Dunque, la conica cercata ha equazione:

$$4x^2 - 3xy - 8x + 4y + 4 = 0$$

ed essendo stata ottenuta per $h = 1 > 0$, per quanto detto in precedenza, è un'iperbole non equilatera. La matrice associata a tale conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -\dfrac{3}{2} & -4 \\ -\dfrac{3}{2} & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e il centro di simmetria si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x - \dfrac{3}{2}y - 4 = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{8}{9}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto di coordinate $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{9}\right)$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h+1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -h$ e $|A| = -h - 1$, concludiamo subito che per $h = 0$ abbiamo un cono e per $h = -1$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Inoltre, essendo:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 1 & -T & 0 \\ 1 & 0 & h+1-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h+1)T^2 + (-h^2-h+2)T - h - 1,$$

vediamo che abbiamo degli ellissoidi se:

$$\begin{cases} 2h+1 > 0 \\ -h^2-h+2 < 0 \\ -h-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure se} \quad \begin{cases} 2h+1 < 0 \\ -h^2-h+2 < 0 \\ -h-1 < 0. \end{cases}$$

Si vede subito che i due sistemi sono impossibili, per cui le quadriche, per $h \neq 0, -1$, sono tutte iperboloidi. In particolare, per $h < 0$, $h \neq -1$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $h > 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.

Sia $h = 0$. Cerchiamo il vertice del cono. Esso ha equazione:

$$2xy + 2xz + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il vertice si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y + z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è il punto $V = (0, 2, -1)$. I piani che incontrano il cono in una conica irriducibile sono quelli per i quali non passa il vertice, per cui deve essere $2 - 1 + k \neq 0$, cioè $k \neq -1$.