Corso di Laurea in Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 10 Luglio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mediante la legge:

$$f(x,y,z) = (3hx + y - hz, hx + 3y - z, hx + y + z, -hx + 3y + hz),$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, indicando, in ciascun caso, una base per $\operatorname{Im} f$ ed una per $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Posti $v_1 = (1,4,0,3)$ e $v_2 = (1,3,1,3)$, determinare $f^{-1}(v_1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. Per $h = 0$ verificare che $\mathcal{F} = [v_1, v_2]$ è una base di $\operatorname{Im} f$ e determinare la matrice associata all'applicazione lineare indotta $f'\colon \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Im} f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{F}$ di $\operatorname{Im} f$.
3. Detta $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione data da $p(x,y,z,t) = (x,y,z)$ per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, si consideri l'endomorfismo $\varphi = p \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e studiarlo al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Nel caso $h = 1$ si verifichi che φ è semplice, determinando una base di autovettori, e si individui tra gli autovalori trovati quello che è autovalore di φ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. È semplice osservare che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 3h & 1 & -h \\ h & 3 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ -h & 3 & h \end{pmatrix}.$$
Da:
$$\begin{vmatrix} h & 3 & -1 \\ h & 1 & 1 \\ -h & 3 & h \end{vmatrix} = -2h(h+5),$$
vediamo che per $h \neq 0, -5$ $\rho(M(f)) = 3$. In particolare, per $h \neq 0, -5$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è data da $[(3h,h,h,-h), (1,3,1,3), (-h,-1,1,h)]$. Da:
$$\begin{pmatrix} 3h & h & h & -h \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -h & -1 & 1 & h \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 0,-5} \begin{pmatrix} 3h & h & h & -h \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ -h-5 & 0 & 0 & h+5 \\ 0 & 0 & 0 & x-y-z+t \end{pmatrix}$$
vediamo che per $h \neq 0, -5$:
$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}.$$

Inoltre, si ha che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 0$, per cui per $h \neq 0, -5$ si ha $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha $\rho(M(f)) = 2$, in quanto la matrice è ridotta per colonne, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è data da $[(1,3,1,3),(0,-1,1,0)]$. Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4x+y+z & t-3x \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h = 0$:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -4x+y+z = 0,\ t-3x = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0)\right).$$

Sia $h = -5$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -15 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -15 & 1 & 5 \\ 40 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente si ha $\rho(M(f)) = 2$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è data da $[(1,3,1,3),(5,-1,1,-5)]$.
Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 & -5 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & -8 \\ x+y-4z & 0 & 0 & -2y+3z+t \end{pmatrix}$$

vediamo che per $h = 0$:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-4z = 0,\ -2y+3z+t = 0\}.$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -15x+y+5z = 40x-16z = 0\} = \mathscr{L}\left((2,5,5)\right).$$

2. Per calcolare $f^{-1}(v_1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3h & 1 & -h & 1 \\ h & 3 & -1 & 4 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ -h & 3 & h & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 0,-5} \left(\begin{array}{ccc|c} 3h & 1 & -h & 1 \\ -8h & 0 & 3h-1 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{h+5}{4} & -\dfrac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 0, -5$ abbiamo:

$$\begin{cases} 3hx + y - hz = 1 \\ -8hx + (3h-1)z = 1 \\ \dfrac{h+5}{4} z = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{h+5} \\ y = \dfrac{2h+5}{h+5} \\ z = -\dfrac{5}{h+5}, \end{cases}$$

per cui per $h \neq 0, -5$ abbiamo:

$$f^{-1}(v_1) = \left\{ \left(-\frac{2}{h+5}, \frac{2h+5}{h+5}, -\frac{5}{h+5} \right) \right\}.$$

Si vede facilmente che per $h = -5$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -15 & 1 & 5 & | & 1 \\ -5 & 3 & -1 & | & 4 \\ -5 & 1 & 1 & | & 0 \\ 5 & 3 & -5 & | & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} -15 & 1 & 5 & | & 1 \\ 40 & 0 & -16 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array} \right),$$

per cui per $h = -5$ $f^{-1}(v_1) = \emptyset$. Per $h = 0$ abbiamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array} \right),$$

per cui per $h = 0$:

$$f^{-1}(v_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1, \ -z = 1\} = \{(x, 1, -1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Sia $h = 0$. Osserviamo che, essendo $f^{-1}(v_1) \neq \emptyset$, certamente $v_1 \in \operatorname{Im} f$. Inoltre, notiamo anche che $f(e_2) = v_2$ (poiché la seconda colonna di $M(f)$ coincide con v_2), per cui $v_2 \in \operatorname{Im} f$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

di rango 2, $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$ sono linearmente indipendenti e, dato che per $h = 0$ $\dim \operatorname{Im} f = 2$, concludiamo facilmente che $\mathcal{F} = [v_1, v_2]$ è una base di $\operatorname{Im} f$. L'applicazione lineare $f' \colon \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{Im} f$ è tale che:

$$\begin{aligned} f'(e_1) &= f(e_1) = (0,0,0,0) \Rightarrow [f'(e_1)]_{\mathcal{F}} = (0,0) \\ f'(e_2) &= f(e_2) = (1,3,1,3) = v_2 \Rightarrow [f'(e_2)]_{\mathcal{F}} = (0,1) \\ f'(e_3) &= f(e_3) = (0,-1,1,0). \end{aligned}$$

Calcoliamo $[f'(e_3)]_{\mathcal{F}}$:

$$(0,-1,1,0) = av_1 + bv_2 = (a+b, 4a+3b, b, 3a+3b) \Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ 4a+3b = -1 \\ b = 1 \\ 3a+3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Dunque, $[f'(e_3)] = (-1, 1)$ e:

$$M^{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dato che:

$$M(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che:

$$M(\varphi) = M(p) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 3h & 1 & -h \\ h & 3 & -1 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|M(\varphi)| = 2h(h+5)$. Dunque, per $h \neq 0, -5$ vediamo che φ è un isomorfismo, cioè φ è iniettiva e suriettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Per $h = 0$ e per $h = -5$ è immediato vedere che $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f$ e che $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Inoltre, per $h = 0$ si vede subito che una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,3,1),(0,-1,1)]$, mentre per $h = -5$ una sua base è $[(1,3,1),(5,-1,1)]$.

4. Sia $h = 1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 1 & -1 \\ 1 & 3-T & -1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (3-T)(2-T)^2,$$

per cui gli autovalori sono 2 e 3 con $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$. Sappiamo che deve essere $\dim V_3 = m_3 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$; ciò vuol dire che φ è semplice se $\dim V_2 = 2 = m_2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$, con $\varphi_2 = \varphi - 2i$ e:

$$M(\varphi_2) = M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente $\dim V_2 = 3 - \rho(M(\varphi_2)) = 3 - 1 = 2 = m_2$, per cui φ è semplice. Inoltre:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,1)).$$

Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} \varphi_3$, con $\varphi_3 = \varphi - 3i$ e:

$$M(\varphi_3) = M(\varphi) - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0,\ x - z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Dunque, una base di autovettori per $h = 1$ è $[(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)]$. Infine, vediamo che $|M(\varphi) - 2I| = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, per cui 2 è autovalore per ogni $h \in \mathbb{R}$. Invece, $|M(\varphi) - 3I| = -h^2 + 4h - 3$, per cui $T = 3$ è autovalore solo per $h = 1$ e $h = 3$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta s passante per $A = (-1,1,1)$, ortogonali alla retta

$$r \colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

e parallela al piano $\pi \colon x + y - z - 1 = 0$. Verificare che r e s sono sghembe e determinare la distanza fra r e s.

2. Studiare il fascio di coniche di equazioni:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 - kxy + 2ky - 4k = 0, \end{cases}$$

determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Determinare centro, assi di simmetria ed equazione canonica della conica Γ del fascio passante per il punto $(-2,1,0)$.

3. Determinare e studiare le quadriche contenenti Γ e tangenti in $P = (1, 1, 1, 0)$ al piano $x - y = 0$.

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(-3, -2, 1)$, per cui, se (l, m, n) sono parametri direttori di s, deve essere:
$$\begin{cases} -3l - 2m + n = 0 \\ l + m - n = 0, \end{cases}$$
le cui soluzioni sono proporzionali alla terna $(1, -2, -1)$, che sono, dunque, parametri direttori di s. Perciò:
$$s\colon x + 1 = \frac{y-1}{-2} = -(z-1) \Rightarrow s\colon \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$
Inoltre, essendo:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$
concludiamo che r e s sono sghembe. Per calcolare la distanza tra le due rette, troviamo il piano α contenente r e parallelo a s. I piani contenenti r hanno equazione:
$$\lambda(x - y + z) + \mu(2x - y + 4z - 4) = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu)x + (-\lambda - \mu)y + (\lambda + 4\mu)z - 4\mu = 0.$$
Quello parallelo a s è tale che i vettori di componenti $(\lambda + 2\mu, -\lambda - \mu, \lambda + 4\mu)$ e $(1, -2, -1)$ sono ortogonali, per cui deve essere $\lambda = 0$. Dunque, $\alpha\colon 2x - y + 4z - 4 = 0$ e:
$$d(r, s) = d(A, \alpha) = \frac{3}{\sqrt{21}}.$$

2. Cominciamo con l'osservare che per $k = \infty$ abbiamo la conica di equazione:
$$-xy + 2y - 4 = 0.$$
È semplice vedere che questa è un'iperbole equilatera. La matrice associata al fascio di coniche è:
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & k \\ 0 & k & -4k \end{pmatrix}$$
e si ha $|B| = k^2(k-3)$. Dunque, per $k \neq 0, 3$ abbiamo delle coniche irriducibili, mentre per $k = 0$ abbiamo la conica spezzata $x^2 = 0$ e per $k = 3$ quella spezzata di equazione $(x-2)(x-y+2) = 0$. Per quanto riguarda i punti base, quando intersechiamo le due coniche spezzate, troviamo il punto proprio $(0, 2, 0)$ e il punto improprio $(0, 1, 0, 0)$, entrambi contati due volte.

   Osserviamo, poi, che:
$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{k^2}{4},$$
per cui le coniche del fascio sono tutte iperboli, tra le quali l'unica equilatera è quella che si ottiene per $k = \infty$.

   Per quanto riguarda la conica del fascio che passa per il punto dato, si vede che essa è quella nascosta:
$$\begin{cases} -xy + 2y - 4 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene facilmente che il centro di simmetria è il punto $(2, 0, 0)$. Inoltre, gli autovalori di A sono $\pm\frac{1}{2}$. Essendo la forma canonica del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, deve essere $-\alpha\beta\gamma = |B| = 1$ e $\alpha\beta = |A| = -\frac{1}{4}$. Dunque, $\gamma = 4$ e α e β sono gli autovalori di A. Prendendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, vediamo che una forma canonica è:

$$\tfrac{1}{2}X^2 - \tfrac{1}{2}Y^2 = 4 \Rightarrow \tfrac{1}{8}X^2 - \tfrac{1}{8}Y^2 = 1.$$

Infine, gli assi di simmetria sono le rette parallele agli autospazi di A e passanti per il centro di simmetria. Si conclude facilmente che sono le rette $x + y - 2 = z = 0$ e $x - y - 2 = z = 0$.

3. Dato che:

$$\Gamma\colon \begin{cases} xy - 2y + 4 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

le coniche che la contengono hanno equazione:

$$xy - 2y + 4 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{b}{2} & -1 \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{b}{2} & c & \dfrac{d}{2} \\ 0 & -1 & \dfrac{d}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{b}{2} & -1 \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{b}{2} & c & \dfrac{d}{2} \\ 0 & -1 & \dfrac{d}{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

vediamo che il piano tangente ha quello di equazione $x - y = 0$ se $\exists\, k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tale che:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{2} = k \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{2} = -k \\ \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} + c = 0 \\ -1 + \dfrac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 - a \\ c = 1 \\ d = 2 \\ a \neq -1. \end{cases}$$

Perciò le quadriche cercate hanno equazione:

$$xy + axz + (-2 - a)yz + z^2 - 2y + 2z + 4 = 0,$$

dove $a \neq -1$. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{-a-2}{2} & -1 \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{-a-2}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{-a-2}{2} \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{-a-2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = -\frac{3(a+1)^2}{4}$, $|A| = -\frac{(a+1)^2}{4}$ e $a \neq -1$, le quadriche devono necessariamente iperboloidi ellittici, in quanto contengono la conica Γ che è un'iperbole.