Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Luglio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito B

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,1,1)$, $w_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Date le basi $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$, rispettivamente, di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 2 & k-1 \\ 1 & k-1 & k-2 & 1 \\ k & -1 & k & -1 \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.
2. Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, calcolare $f^{-1}(V)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione, e stabilire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ si verifica che $[v_1, v_2 + (k-1)v_4, v_3]$ è una base di $f^{-1}(V)$.
4. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 1 & 2 & -k-1 \\ -1 & -1 & -k \end{pmatrix},$$
diagonalizzare A per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali è possibile.

Soluzione

1. Dall'assegnazione di f abbiamo:

$$\begin{cases} f(v_1) = (k-1)w_1 + w_2 + kw_3 \\ f(v_2) = w_1 + (k-1)w_2 - w_3 \\ f(v_3) = 2w_1 + (k-2)w_2 + kw_3 \\ f(v_4) = (k-1)w_1 + w_2 - w_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (k-1, k, k+1) \\ f(e_2) + f(e_3) = (1, k, k-2) \\ f(e_3) = (2, k, 2k-2) \\ f(e_4) = (k-1, k, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (k, k, 2k+1) \\ f(e_2) = (-1, 0, -k) \\ f(e_3) = (2, k, 2k-2) \\ f(e_4) = (k-1, k, 0). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & k & k \\ 2k+1 & -k & 2k-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Per studiare f riduciamo $M(f)$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & k & k \\ 2k+1 & -k & 2k-2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } k\neq 0} \begin{pmatrix} k & -1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & k & k \\ k+1 & 0 & k^2-k-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $k^2 - k - 2 = 0$ per $k = -1$ e $k = 2$, l'ultima riga è nulla per $k = -1$. Dunque, per $k \neq 0, -1$ possiamo dire che $\rho(M(f)) = 3$, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 3$. In particolare, essendo $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, deduciamo che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, per cui f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \\ kx - y + 2z + (k-1)t = 0,\ kx + kz + kt = 0,\ (k+1)x + (k^2-k-2)z = 0\} = \\ = \mathscr{L}\left((2-k, 5-2k, 1, k-3)\right). \end{aligned}$$

Sia $k = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(-1,-1,-1), (-1,0,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x - y + 2z - 2t = 0,\ -x - z - t = 0\}.$$

Sia $k = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(0,0,1), (-1,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y + 2z - t = 0,\ x - 2z = 0\}.$$

3. Per definizione:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) \in V\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \\ (kx - y + 2z + (k-1)t, kx + kz + kt, (2k+1)x - ky + (2k-2)z) \in V\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (k+1)x - (k+1)y - (k+1)t = 0\}. \end{aligned}$$

Dunque, per $k \neq -1$ $f^{-1}(V)\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = 0\}$ e, in particolare, per $k \neq -1$, si ha $\dim f^{-1}(V) = 3$. Invece, per $k = -1$ si ha $f^{-1}(V) = \mathbb{R}^4$, per cui chiaramente $\dim f^{-1}(V) = 4$.

Affinché $[v_1, v_2 + kv_4, v_3]$ sia base di $f^{-1}(V)$, deve essere $\dim f^{-1}(V) = 3$, cioè deve necessariamente essere $k \neq -1$. Inoltre, è facile vedere che $v_1, v_3 \in f^{-1}(V)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, mentre, per $k \neq -1$, $v_2 + (k-1)v_4 \in f^{-1}(V)$ solo per $k = 0$. Essendo, poi, i tre vettori $v_1, v_2 + (k-1)v_4, v_3$ linearmente indipendenti, concludiamo che per $k = 0$ $[v_1, v_2 + (k-1)v_4, v_3]$ è una base di $f^{-1}(V)$.

4. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & k+1 \\ 1 & 2-T & -k-1 \\ -1 & -1 & -k-T \end{vmatrix} = (1-T)(2-T)(-k-T),$$

per cui gli autovalori sono 1, 2 e $-k$. Per $k \neq -1, -2$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui per $k \neq -1, -2$ la matrice A è diagonalizzabile.

Sia, dunque, $k \neq -1, -2$. Calcoliamo V_1:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & -k-1 \\ -1 & -1 & -k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } k\neq -1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (k+1)z = 0,\ x+y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,0)\right).$$
Calcoliamo V_2:
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k+1 \\ 1 & 0 & -k-1 \\ -1 & -1 & -k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2k-3 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+(k+1)z = 0,\ -y+(-2k-3)z=0\} = \mathscr{L}\left((k+1,-2k-3,1)\right).$$
Calcoliamo V_{-k}:
$$A + kI = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k+1 \\ 1 & k+2 & -k-1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } k\neq -1,-2} \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k+1 \\ k+2 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$V_{-k} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (k+1)x+(k+1)z = 0,\ (k+2)x+(k+2)y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,-1)\right).$$
Concludiamo, perciò, che per $k \neq -1, -2$ si ha che $P^{-1}AP = D$, essendo:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ -1 & -2k-3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$
Sia $k=-1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Dato che necessariamente deve essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, A è diagonalizzabile se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Dato che:
$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
vediamo che $\dim V_1 = 3-1 = 2 = m_1$. Dunque, per $h=1$ la matrice A è diagonalizzabile e:
$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,0),(0,0,1)\right).$$
Calcoliamo V_2:
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
per cui:
$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x = 0,\ -y-z=0\} = \mathscr{L}\left((0,1,-1)\right).$$
Concludiamo, perciò, che per $k=-1$ si ha che $P^{-1}AP = D$, essendo:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Sia $k=-2$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Dovendo necessariamente essere $\dim V_1 = m_1 = 1$, A è diagonalizzabile se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Da:
$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
vediamo che $\dim V_2 = 3-2 = 1 < 2 = m_2$, per cui per $k=-2$ la matrice A non è diagonalizzabile.

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (0,1,1)$ e la retta:

$$r\colon \begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z + 2 = 0, \end{cases}$$

determinare la retta s passante per P e ortogonale e incidente la retta r. Calcolare la distanza $d(P,r)$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(4h+5)x^2 - hy^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0,$$

con $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Data la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 - 4y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare il cono e il cilindro contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V_1 = (-1,1,-1)$ e $V_2 = (-1,1,-1,0)$.

Soluzione

1. Cerchiamo il piano π passante per P e ortogonale a r. Essendo $(1,-1,-1)$ parametri direttori di r, vediamo che π ha equazione $x - y - z + 2 = 0$. Cerchiamo il punto $H = r \cap \pi$:

$$H\colon \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Dunque, $H = (-1,1,0)$ e:

$$s = HP\colon \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Inoltre:

$$d(P,r) = \overline{PH} = \sqrt{2}.$$

2. Osserviamo subito che la conica nascosta ha equazione $(2x+y)(2x-y) = 0$, per cui essa è spezzata. Da:

$$B = \begin{pmatrix} 4h+5 & 1 & 1 \\ 1 & -h & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = 12h(h+1)$, per cui per $h \neq 0, -1$ abbiamo coniche irriducibili. Per $h = 0$ abbiamo la conica spezzata di equazione:

$$5x^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(5x+2y-3) = 0.$$

Per $h = -1$ abbiamo la conica spezzata di equazione:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (x+y+3)(x+y-1) = 0.$$

I punti base del fascio sono i punti comuni a due qualsiasi coniche del fascio:

$$\begin{cases} (2x+y)(2x-y) = 0 \\ (x+y+3)(x+y-1) = 0, \end{cases}$$

per cui essi sono i punti $(3,-6)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$ e $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4h+5 & 1 \\ 1 & -h \end{vmatrix} = -4h^2 - 5h - 1,$$

vediamo che per $h < -1$, e $h > -\frac{1}{4}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = -\frac{5}{3}$; per $h = -\frac{1}{4}$ abbiamo una parabola, mentre per $h = -1$ abbiamo una conica spezzata; per $-1 < h < -\frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non vi è alcuna circonferenza.

3. Il generico punto P della conica ha coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove:

$$2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\beta = 0.$$

La retta PV_1 ha equazioni:

$$\frac{x+1}{\alpha+1} = \frac{y-1}{\beta-1} = z+1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x-z}{z+1} \\ \beta = \dfrac{y+z}{z+1}. \end{cases}$$

Sostituendo e moltiplicando per $(z+1)^2$ otteniamo l'equazione del cono:

$$2(x-z)^2 - 2(x-z)(y+z) + (y+z)^2 - 4(y+z)(z+1) = 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 6xz - 4y - 4z = 0.$$

Per quanto riguarda il cilindro, la retta PV_2 ha equazioni:

$$-(x-\alpha) = y - \beta = -z \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y + z. \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo l'equazione del cilindro:

$$2(x-z)^2 - 2(x-z)(y+z) + (y+z)^2 - 4(y+z) = 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 6xz + 4yz - 4y - 4z = 0.$$