Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Luglio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,0,1,0)$, $v_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (0,1,1)$, $w_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Date le basi $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$, rispettivamente, di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 2 & h \\ 1 & h & h-1 & 1 \\ h+1 & -1 & h+1 & -1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

2. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso Ker f e Im f.

3. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, calcolare $f^{-1}(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione, e stabilire per quale valore di $h \in \mathbb{R}$ si verifica che $[v_1, v_2 + hv_4, v_3]$ è una base di $f^{-1}(V)$.

4. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-h \\ 1 & 2 & h-1 \\ -1 & -1 & h \end{pmatrix},$$
diagonalizzare A per i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali è possibile.

Soluzione

1. Dall'assegnazione di f abbiamo:

$$\begin{cases} f(v_1) = hw_1 + w_2 + (h+1)w_3 \\ f(v_2) = w_1 + hw_2 - w_3 \\ f(v_3) = 2w_1 + (h-1)w_2 + (h+1)w_3 \\ f(v_4) = hw_1 + w_2 - w_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (h, h+1, h+2) \\ f(e_2) + f(e_3) = (1, h+1, h-1) \\ f(e_3) = (2, h+1, 2h) \\ f(e_4) = (h, h+1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h+1, h+1, 2h+3) \\ f(e_2) = (-1, 0, -h-1) \\ f(e_3) = (2, h+1, 2h) \\ f(e_4) = (h, h+1, 0). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & 2 & h \\ h+1 & 0 & h+1 & h+1 \\ 2h+3 & -h-1 & 2h & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Per studiare f riduciamo $M(f)$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & 2 & h \\ h+1 & 0 & h+1 & h+1 \\ 2h+3 & -h-1 & 2h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq -1} \begin{pmatrix} h+1 & -1 & 2 & h \\ h+1 & 0 & h+1 & h+1 \\ h+2 & 0 & h^2+h-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $h^2+h-2=0$ per $h=1$ e $h=-2$, l'ultima riga è nulla per $h=-2$. Dunque, per $h\neq -1,-2$ possiamo dire che $\rho(M(f))=3$, per cui $\dim \operatorname{Im} f = 3$. In particolare, essendo $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, deduciamo che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, per cui f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \\ &(h+1)x - y + 2z + ht = 0,\ (h+1)x + (h+1)z + (h+1)t = 0,\ (h+2)x + (h^2+h-2)z = 0\} = \\ &\qquad\qquad = \mathscr{L}\left((1-h, 3-2h, 1, h-2)\right). \end{aligned}$$

Sia $h=-2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(-1,-1,-1),(-1,0,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4-2=2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x-y+2z-2t=0,\ -x-z-t=0\}.$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(0,0,1),(-1,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y+2z-t=0,\ x-2z=0\}.$$

3. Per definizione:

$$\begin{aligned} &f^{-1}(V) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) \in V\} = \\ &\qquad = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \\ &((h+1)x - y + 2z + ht, (h+1)x + (h+1)z + (h+1)t, (2h+3)x + (-h-1)y + 2hz) \in V\} = \\ &\qquad = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h+2)x - (h+2)y - (h+2)t = 0\}. \end{aligned}$$

Dunque, per $h \neq -2$ $f^{-1}(V)\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-t=0\}$ e, in particolare, per $h\neq -2$, si ha $\dim f^{-1}(V) = 3$. Invece, per $h=-2$ si ha $f^{-1}(V) = \mathbb{R}^4$, per cui chiaramente $\dim f^{-1}(V) = 4$.

Affinché $[v_1, v_2 + hv_4, v_3]$ sia base di $f^{-1}(V)$, deve essere $\dim f^{-1}(V) = 3$, cioè deve necessariamente essere $h \neq -2$. Inoltre, è facile vedere che $v_1, v_3 \in f^{-1}(V)$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, mentre, per $h \neq -2$, $v_2 + hv_4 \in f^{-1}(V)$ solo per $h=-1$. Essendo, poi, i tre vettori v_1, v_2+hv_4, v_3 linearmente indipendenti, concludiamo che per $h=-1$ $[v_1, v_2+hv_4, v_3]$ è una base di $f^{-1}(V)$.

4. Si vede che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1-h \\ 1 & 2-T & h-1 \\ -1 & -1 & h-T \end{vmatrix} = (1-T)(2-T)(h-T),$$

per cui gli autovalori sono $1, 2$ e h. Per $h \neq 1,2$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui per $h \neq 1,2$ la matrice A è diagonalizzabile.

Sia, dunque, $h \neq 1,2$. Calcoliamo V_1:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 1 & 1 & h-1 \\ -1 & -1 & h-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-h \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-h)z = 0,\ x+y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,0)\right).$$

Calcoliamo V_2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-h \\ 1 & 0 & h-1 \\ -1 & -1 & h-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2h-3 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+(1-h)z = 0,\ -y+(2h-3)z=0\} = \mathscr{L}\left((1-h, 2h-3, 1)\right).$$

Calcoliamo V_h:

$$A - hI = \begin{pmatrix} 1-h & 0 & 1-h \\ 1 & 2-h & h-1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h\neq 1,2} \begin{pmatrix} 1-h & 0 & 1-h \\ 2-h & 2-h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1-h)x+(1-h)z = 0,\ (2-h)x+(2-h)y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,-1)\right).$$

Concludiamo, perciò, che per $h \neq 1,2$ si ha che $P^{-1}AP = D$, essendo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1-h & 1 \\ -1 & 2h-3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Sia $h=1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Dato che necessariamente deve essere $\dim V_2 = m_2 = 1$, A è diagonalizzabile se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Dato che:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim V_1 = 3-1 = 2 = m_1$. Dunque, per $h=1$ la matrice A è diagonalizzabile e:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\} = \mathscr{L}\left((1,-1,0),(0,0,1)\right).$$

Calcoliamo V_2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x = 0,\ -y-z=0\} = \mathscr{L}\left((0,1,-1)\right).$$

Concludiamo, perciò, che per $h=1$ si ha che $P^{-1}AP = D$, essendo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $h=2$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Dovendo necessariamente essere $\dim V_1 = m_1 = 1$, A è diagonalizzabile se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Da:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim V_2 = 3-2 = 1 < 2 = m_2$, per cui per $h=2$ la matrice A non è diagonalizzabile.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (1, 1, 0)$ e la retta:
$$r\colon \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z + 2 = 0, \end{cases}$$
determinare la retta s passante per P e ortogonale e incidente la retta r. Calcolare la distanza $d(P, r)$.

2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$hx^2 + (5 - 4h)y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0,$$
con $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3. Data la conica
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$
determinare il cono e il cilindro contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V_1 = (1, -1, -1)$ e $V_2 = (1, -1, -1, 0)$.

Soluzione

1. Cerchiamo il piano π passante per P e ortogonale a r. Essendo $(1, 1, -1)$ parametri direttori di r, vediamo che π ha equazione $x + y - z - 2 = 0$. Cerchiamo il punto $H = r \cap \pi$:
$$H\colon \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1. \end{cases}$$
Dunque, $H = (1, 0, -1)$ e:
$$s = HP\colon \begin{cases} x = 1 \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$$
Inoltre:
$$d(P, r) = \overline{PH} = \sqrt{2}.$$

2. Osserviamo subito che la conica nascosta ha equazione $(x + 2y)(x - 2y) = 0$, per cui essa è spezzata. Da:
$$B = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 5 - 4h & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$
vediamo che $|B| = 12h(h - 1)$, per cui per $h \neq 0, 1$ abbiamo coniche irriducibili. Per $h = 0$ abbiamo la conica spezzata di equazione:
$$2xy + 5y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y + 1)(2x + 5y - 3) = 0.$$
Per $h = 1$ abbiamo la conica spezzata di equazione:
$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (x + y + 3)(x + y - 1) = 0.$$
I punti base del fascio sono i punti comuni a due qualsiasi coniche del fascio:
$$\begin{cases} (x + 2y)(x - 2y) = 0 \\ (x + y + 3)(x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

per cui essi sono i punti $(-6,3)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ e $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. Inoltre, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h & 1 \\ 1 & 5-4h \end{vmatrix} = -4h^2 + 5h - 1,$$

vediamo che per $h < \frac{1}{4}$, $h \neq 0$, e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, tra le quali figura una equilatera per $h = \frac{5}{3}$; per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 1$ abbiamo una conica spezzata; per $\frac{1}{4} < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tra le quali non vi è alcuna circonferenza.

3. Il generico punto P della conica ha coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove:

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 - 4\alpha = 0.$$

La retta PV_1 ha equazioni:

$$\frac{x-1}{\alpha-1} = \frac{y+1}{\beta+1} = z+1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x+z}{z+1} \\ \beta = \dfrac{y-z}{z+1}. \end{cases}$$

Sostituendo e moltiplicando per $(z+1)^2$ otteniamo l'equazione del cono:

$$(x+z)^2 - 2(x+z)(y-z) + 2(y-z)^2 - 4(x+z)(z+1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 6yz - 4x - 4z = 0.$$

Per quanto riguarda il cilindro, la retta PV_2 ha equazioni:

$$x - \alpha = -(y-\beta) = -z \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x + z \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo l'equazione del cilindro:

$$(x+z)^2 - 2(x+z)(y-z) + 2(y-z)^2 - 4(x+z) = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 4xz - 6yz - 4x - 4z = 0.$$