Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Febbraio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (0,1,-1,1)$ e $v_2 = (1,0,0,-1)$ ed i sottospazi $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z = t-2y-z = 0\}$ e $Z = \mathscr{L}(v_1, v_2)$.

1. Determinare $W \cap Z$ e $W + Z$.
2. Verificare che le seguenti assegnazioni:
$$\begin{aligned} f(1,0,1,1) &= (4,5,1) \\ f(0,1,-1,1) &= (-2,-2,0) \\ f(1,0,0,-1) &= (3,-1,-4) \end{aligned}$$
definiscono un'applicazione lineare $f\colon W+Z \to \mathbb{R}^3$. Studiare f, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. Dati $w_1 = (2,-2,3,-2)$, $w_2 = (2,1,1,3)$ e $w_3 = (2,0,1,0)$, provare che $F = [w_1, w_2, w_3]$ è una base di $W+Z$ e determinare la matrice associata a f rispetto alla base F di $W+Z$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
4. Diagonalizzare la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

1. Si vede che:
$$W = \{(y+z, y, z, 2y+z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,2),(1,0,1,1)),$$
per cui $\dim W = 2$ e $[(1,1,0,2),(1,0,1,1)]$ è una sua base. Dunque:
$$W + Z = \mathscr{L}((0,1,-1,1),(1,0,0,-1),(1,1,0,2),(1,0,1,1)).$$
Calcoliamo la sua dimensione determinandone una base:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim(W+Z) = 3$ e una sua base è $[(0,1,-1,1),(1,0,0,-1),(1,0,1,1)]$. Inoltre, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, in quanto la seguente matrice:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 2. Questo vuol dire che $\dim Z = 2$ e dalla formula di Grassman otteniamo:

$$\dim(W \cap Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W + Z) = 1.$$

Cerchiamo le equazioni cartesiane di Z:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & z+y & t-y+x \end{pmatrix},$$

per cui $Z = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = x - y + t = 0\}$. Quindi:

$$W \cap Z = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z = x - y + t = 0,\ x - y - z = t - 2y - z = 0\} = \\ = \{(0, y, -y, y) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((0, 1, -1, 1)).$$

2. Come abbiamo visto nel punto precedente, i vettori $(0, 1, -1, 1), (1, 0, 0, -1), (1, 0, 1, 1)$ individuano una base di $W + Z$, per cui f è una ben definita applicazione lineare, in quanto sono assegnate le immagini dei vettori di una base.

   Ponendo $\mathscr{A} = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 0, -1)]$, è chiaro, per definizione di matrice associata, che:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è $[(4, 5, 1), (-2, -2, 0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim(W + Z) - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in W + Z \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ 4a - 2b + 3c = 0,\ a - 4c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (4c, \tfrac{17}{3}c, c)\} = \\ = \mathscr{L}((12, 17, 3)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(12(1, 0, 1, 1) + 17(0, 1, -1, 1) + 3(1, 0, 0, -1)) = \mathscr{L}((15, 17, -5, 26)).$$

3. Osserviamo, intanto, che w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

   in quanto individuano una matrice di rango 3. Per fare vedere che w_1, w_2 e w_3 individuano una base di $W + Z$, basta fare vedere che essi sono combinazione lineare di $(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, 0, -1)$, la qual cosa ci consente, allo stesso tempo, di calcolare le loro componenti rispetto alla base $\mathscr{A}$.

   Dire che $w_1 \in W + Z$ vuol dire che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$(2, -2, 3, -2) = a(1, 0, 1, 1) + b(0, 1, -1, 1) + c(1, 0, 0, -1) = (a + c, b, a - b, a + b - c),$$

   cioè tali che:

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ b = -2 \\ a - b = 3 \\ a + b - c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1. \end{cases}$$

   Dato che il sistema è possibile, allora $w_1 \in W + Z$ e $[w_1]_{\mathscr{A}} = (1, -2, 1)$. Questo ci consente di calcolare $f(w_1)$:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix},$$

   per cui $f(w_1) = (11, 8, -3)$.

Dire che $w_2 \in W + Z$ vuol dire che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$(2,1,1,3) = a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) + c(1,0,0,-1) = (a+c, b, a-b, a+b-c),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} a+c=2 \\ b=1 \\ a-b=1 \\ a+b-c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0. \end{cases}$$

Dato che il sistema è possibile, allora $w_2 \in W + Z$ e $[w_2]_{\mathscr{A}} = (2,1,0)$. Questo ci consente di calcolare $f(w_2)$:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

per cui $f(w_2) = (6,8,2)$.
Dire che $w_3 \in W + Z$ vuol dire che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:

$$(2,0,1,0) = a(1,0,1,1) + b(0,1,-1,1) + c(1,0,0,-1) = (a+c, b, a-b, a+b-c),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} a+c=2 \\ b=0 \\ a-b=1 \\ a+b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1. \end{cases}$$

Dato che il sistema è possibile, allora $w_3 \in W + Z$ e $[w_3]_{\mathscr{A}} = (1,0,1)$. Questo ci consente di calcolare $f(w_3)$:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

per cui $f(w_3) = (7,4,-3)$. Quindi:

$$M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 8 & 8 & 4 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Per diagonalizzare A occorre calcolarne il polinomio caratteristico:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ -1 & 3-T & 3 \\ -1 & 1 & 3-T \end{vmatrix} = (1-T)(2-T)(4-T),$$

per cui gli autovalori sono 1, 2 e 4, tutti di molteplicità algebrica 1. Questo ci permette di concludere subito che A è diagonalizzabile. Per diagonalizzarla dobbiamo calcolarne gli autospazi.
Sia $T = 1$. Da:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0,\ -x+z=0\} = \mathscr{L}((1,-1,1))$.
Sia $T = 2$. Da:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0,\ 2z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0))$.

Sia $T = 4$. Da:
$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
vediamo che $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + y + z = 0, -4x + 4z = 0\} = \mathscr{L}((1, 2, 1))$. Quindi, possiamo dire che $P^{-1}AP = D$, dove:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare la retta r passante per $A = (1, 0, 0)$, parallela al piano $\alpha\colon x - 4y + 3z = 0$ e complanare con la retta $s\colon x + 1 = y - 2z - 2 = 0$. Determinare la distanza dell'origine da r.
2. Nel piano $z = 0$ determinare e studiare il fascio di coniche passanti per $O = (0, 0)$, $A = (0, 4)$ e simmetriche rispetto alla retta $x + y = 0$. Detta Γ l'unica parabola del fascio, determinarne vertice, asse e una sua equazione canonica.
3. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
la retta $x = y = z$ il punto $A = (0, 0, 1)$.

Soluzione

1. La retta r è intersezione del piano π_1 parallela ad α e passante per A e del piano π_2 contenente s e passante per A.

   I piani paralleli ad α hanno equazione $x - 4y + 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per A abbiamo $d + 1 = 0$, per cui $d = -1$ e $\pi_1\colon x - 4y + 3z - 1 = 0$.

   I piani contenenti s hanno equazione $\lambda(x + 1) + \mu(y - 2z - 2) = 0$. Imponendo il passaggio per A troviamo $2\lambda - 2\mu = 0$, per cui possiamo prendere $\lambda = \mu = 1$ e otteniamo $\pi_2\colon x + y - 2z - 1 = 0$. Concludiamo:
$$r = \pi_1 \cap \pi_2\colon \begin{cases} x - 4y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$
   Per calcolare $d(O, r)$ dobbiamo determinare il piano β passante per O e ortogonale a r. La retta r ha $(1, 1, 1)$ come parametri direttori, per cui $\beta\colon x + y + z = 0$. Determiniamo il punto $H = \beta \cap r$:
$$H\colon \begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3}, \end{cases}$$
   cioè $H = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Dunque:
$$d(O, r) = \overline{OH} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2. Dal momento che le coniche passano per O, il quale appartiene all'asse di simmetria $x+y=0$, concludiamo che O è vertice per queste coniche. Ciò significa che la retta passante per O e ortogonale all'asse $x+y=0$, che è la retta $x-y=0$, è tangente alle coniche in O.

   Inoltre, dato che $x+y=0$ è l'asse di simmetria e le coniche passano per A, possiamo dire che le coniche passano per il punto A' simmetrico di A rispetto all'asse. La retta s passante per A e ortogonale all'asse ha equazione $s\colon x-y+4=0$. Il punto M comune all'asse e a s è:

$$M\colon \begin{cases} x-y+4=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2. \end{cases}$$

   Quindi, $M=(-2,2)$ è il punto medio di $A=(0,4)$ e di $A'=(a,b)$, per cui:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}=-2 \\ \dfrac{b+4}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=0. \end{cases}$$

   Dunque, $A'=(-4,0)$. Riepilogando, il fascio di coniche cercato è tangente alla retta $x-y=0$ in O e passa per i punti $A=(0,4)$ e $A'=(-4,0)$. Dal momento che $AA'\colon x-y+4=0$, $AO\colon x=0$ e $A'O\colon y=0$, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x-y)(x-y+4)+hxy=0 \Rightarrow x^2+(h-2)xy+y^2+4x-4y=0.$$

   Per costruzione è evidente che le coniche spezzate del fascio sono solo quella nascosta e quella che si ottiene per $h=0$. Inoltre, essendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{h-2}{2} \\ \dfrac{h-2}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

   vediamo che $|A|=\frac{-h^2+4h}{4}$. Quindi, per $h=4$ abbiamo l'unica parabola del fascio, per $0<h<4$ abbiamo delle ellissi, tra le quali abbiamo una circonferenza reale per $h=2$, e per $h<0$ e $h>4$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

   La parabola del fascio ha equazione $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0$. Per quanto detto, il vertice è il punto $(0,0)$ e l'asse di simmetria ha equazione $x+y=0$. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $|B|=-16$ e $\mathrm{Tr}(A)=2$. Un'equazione canonica è del tipo $\beta Y^2=2\gamma X$, dove $|B|=-\beta\gamma^2$ e $\beta=\mathrm{Tr}(A)$. Quindi, $\beta=2$ e, scegliendo $\gamma=2\sqrt{2}$, vediamo che un'equazione canonica è $2Y^2=4\sqrt{2}X$, cioè $Y^2=2\sqrt{2}X$.

3. Le quadriche che contengono la conica hanno equazione:

$$4x^2-y^2-2x+2y+z(ax+by+cz+d)=0.$$

   Imponiamo che contenga la retta data:

$$\begin{cases} x=z \\ y=z \\ 4x^2-y^2-2x+2y+z(ax+by+cz+d)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \\ (a+b+c+3)z^2+dz=0. \end{cases}$$

   Affinché la retta sia contenuta nella quadrica deve essere $a+b+c+3=0$ e $d=0$. Quando imponiamo il passaggio per il punto troviamo $c+d=0$. Dunque, per le quadriche cercate abbiamo:

$$\begin{cases} a+b+c+3=0 \\ c+d=0 \\ d=0 \end{cases}$$

Dunque, $c = 0$, $d = 0$ e $b = -3 - a$. Dunque:

$$4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z[ax + (-3-a)y] = 0 \Rightarrow 4x^2 - y^2 + axz + (-a-3)yz - 2x + 2y = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dfrac{a}{2} & -1 \\ 0 & -1 & \dfrac{-a-3}{2} & 1 \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{-a-3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \dfrac{a}{2} \\ 0 & -1 & \dfrac{-a-3}{2} \\ \dfrac{a}{2} & \dfrac{-a-3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $|B| = \frac{9}{4}$ e $|A| = \frac{-3a^2-24a-36}{4}$, per cui $|A| = 0$ per $a = 2$ e $a = 6$. Dunque, concludiamo che per $a = 2$ e $a = 6$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici. Per $a \neq 2, 6$ abbiamo necessariamente degli iperboloidi iperbolici (non possono essere ellissoidi immaginari in quanto contengono punti reali).