CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare**- 7 Maggio 2018

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

Sono assegnate le basi $\mathcal{A} = [(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)]$ e $\mathcal{B} = [(1,0,1),(0,0,1),(0,1,0)]$ di $\mathbb{R}^3$ ed è assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 2 & h & 3 \\ 1 & h+1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Sia $V = \mathscr{L}((1,1,1),(1,1,0))$. Calcolare $f(V)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione, e determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f(V) = \operatorname{Im} f$.
3. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:
$$\begin{aligned} g(1,1,1) &= (h,h,h) \\ g(1,1,0) &= (1,1,0) \\ g(1,0,0) &= (3,1,1), \end{aligned}$$
con $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$. In particolare, nei casi $h = 1$ e $h = 2$ determinare, se possibile, una base di autovettori.
4. Risolvere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x + 2y + z + ht = 1 \\ 2x + y + 3z + t = 1 \\ 3x + (h+4)y + 4z + (h+1)t = h+3 \\ y + z + (2h+1)t = -1. \end{cases}$$

Soluzione

1. È immediato vedere che $|M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)| = h^2 - 4$, per cui per $h \neq \pm 2$ possiamo concludere subito che f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. Dunque, per $h \neq \pm 2$ abbiamo che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $h = 2$. In tal caso:
$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 2$ e:
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \mathscr{L}((1,2,1)_{\mathcal{B}}, (-1,2,3)_{\mathcal{B}}) = \\ &= \mathscr{L}((1,0,1)+(0,0,2)+(0,1,0), (-1,0,-1)+(0,0,2)+(0,3,0)) = \mathscr{L}((1,1,3),(-1,3,1)). \end{aligned}$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a-b+2c=0,\ 4b-c=0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (-7b,b,4b)\} = \mathscr{L}((-7,1,4)_{\mathcal{A}}) = \\ &= \mathscr{L}((-7,-7,-7)+(1,1,0)+(4,0,0)) = \mathscr{L}((-2,-6,-7)).\end{aligned}$$

Sia $h=-2$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)) = 2$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \mathscr{L}((1,2,1)_{\mathcal{B}}, (-2,3,1)_{\mathcal{B}}) = \\ &= \mathscr{L}((1,0,1)+(0,0,2)+(0,1,0), (-2,0,-2)+(0,0,3)+(0,1,0)) = \mathscr{L}((1,1,3),(-2,1,1)).\end{aligned}$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ a-b-2c=0,\ 7c=0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (b,b,0)\} = \mathscr{L}((1,1,0)_{\mathcal{A}}) = \\ &= \mathscr{L}((1,1,1)+(1,1,0)) = \mathscr{L}((2,,2,1)).\end{aligned}$$

2. Dalla definizione di matrice associata a un'applicazione lineare sappiamo che:

$$\begin{aligned}&[f(1,1,1)]_{\mathcal{B}} = (1,2,1) \Rightarrow f(1,1,1) = (1,0,1)+(0,0,2)+(0,1,0) = (1,1,3) \\ &[f(1,1,0)]_{\mathcal{B}} = (-1,h,h+1) \Rightarrow f(1,1,0) = (-1,0,-1)+(0,0,h)+(0,h+1,0) = (-1,h+1,h-1).\end{aligned}$$

Dunque:
$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,1), f(1,1,0)) = \mathscr{L}((1,1,3),(-1,h+1,h-1)).$$

Da:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & h+1 & h-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & h+2 & h+2 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\dim f(V) = 2$ per $h \neq -2$, per cui in tal caso $[(1,1,3),(-1,h+1,h-1)]$ è una sua base, e $\dim f(V) = 1$ per $h=-2$, caso in cui una sua base è $[(1,1,3)]$. Dunque, se $f(V) = \operatorname{Im} f$ allora deve necessariamente essere $h=2$. Infatti, in tal caso $f(V) = \mathscr{L}((1,1,3),(-1,3,1)) = \operatorname{Im} f$.

3. È evidente che $[g(1,1,1)]_{\mathcal{A}} = (h,0,0)$ e che $[g(1,1,0)]_{\mathcal{A}} = (0,1,0)$. Dobbiamo calcolare $[g(1,0,0)]_{\mathcal{A}} = [(3,1,1)]_{\mathcal{A}}$:

$$(3,1,1) = a(1,1,1)+b(1,1,0)+c(1,0,0) = (a+b+c,a+b,a) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ a+b=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=2. \end{cases}$$

Dunque, $[g(1,0,0)]_{\mathcal{A}} = [(3,1,1)]_{\mathcal{A}} = (1,0,2)$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi:
$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (h-T)(1-T)(2-T),$$

per cui gli autovalori sono h, 1 e 2. Concludiamo che per $h \neq 1, 2$ g è certamente semplice, in quanto gli autovalori sono tutti di molteplicità algebrica 1.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, dove $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Sappiamo che certamente $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$, per cui g sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Osserviamo che per $h = 1$ $(1,1,1), (1,1,0) \in V_1$ e, dunque, deve essere $V_1 = \mathscr{L}((1,1,1),(1,1,0))$, dal momento che i due vettori sono chiaramente linearmente indipendenti e $\dim V_1 \leq 2$. Questo vuol dire che g è semplice per $h = 1$.

Calcoliamo, ora, V_2. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} g_2$, dove $g_2 = g - 2i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(g_2) = M^{\mathcal{A}}(g) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\begin{aligned} V_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,b,c),\ -a+c=0,\ b=0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathcal{A}} = (a,0,a)\} = \mathscr{L}((1,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}((2,1,1)). \end{aligned}$$

Quindi, per $h = 1$ una base di autovettori è $[(1,1,1),(1,1,0),(2,1,1)]$.

Sia $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, dove $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Sappiamo che certamente $\dim V_1 = m_1 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$, per cui g sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$.

Sia $T = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} g_2$, dove $g_2 = g - 2i$ e:

$$M^{\mathcal{A}}(g_2) = M^{\mathcal{A}}(g) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim V_2 = 3 - \rho(M^{\mathcal{A}}(g_2)) = 1 < 2 = m_2$. Questo ci dice che per $h = 2$ g non è semplice e che non esiste in tal caso una base di autovettori.

4. La matrice completa associata al sistema è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & h & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & h+4 & 4 & h+1 & h+3 \\ 0 & 1 & 1 & 2h+1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & h & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1-2h & -1 \\ 0 & h+1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & 4 & 0 & 4h & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{riducendo per } h \neq -1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & h & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1-2h & -1 \\ 0 & h+1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4h & -4 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0, -1$ il sistema ha una sola soluzione:

$$\begin{cases} x + 2y + z + ht = 1 \\ -3y + z + (1-2h)t = -1 \\ (h+1)y = h+1 \\ 4ht = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{h} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{h} \\ t = -\dfrac{1}{h}, \end{cases}$$

cioè la soluzione per $h \neq 0, -1$ è $\left\{\left(-\frac{1}{h}, 1, \frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right)\right\}$.

Per $h = 0$ è evidente che $\rho(A|B) = 4$ e $\rho(A) = 3$, per cui il sistema non ha soluzioni.

Sia $h = -1$. In tal caso, abbiamo visto che otteniamo la matrice:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & | & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso, il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 1 \\ -3y + z + 3t = -1 \\ 4y - 4t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = -1 \\ t = y. \end{cases}$$

Quindi, per $h = -1$ le soluzioni sono $\{(2 - y, y, -1, y) \in \mathbb{R}^4\}$.