Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 3 Maggio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 2, 0)$, $v_3 = (2, -1, 1, 0)$ e $v_4 = (2, -1, 3, 1)$.

1. Posto $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, determinare la dimensione di V, una sua base e le sue equazioni cartesiane.

2. Dati $w_1 = (2, 0, 0, 1)$, $w_2 = (-1, 0, 1, 0)$ e $w_3 = (0, 1, -1, 1)$, dopo avere verificato che $\mathcal{F} = [w_1, w_2, w_3]$ è una base di V, si studi l'applicazione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice:

$$M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h+1 \\ 1 & h & 1 \\ 0 & h & -1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

rispetto alla base $\mathcal{F}$ di V e alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

3. Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(1, 2, 1)$.

4. Diagonalizzare la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione

1. Riduciamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, a matrice ha rango 3, $\dim V = 3$ e una sua base è $[(-1, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 0), (1, 0, -1, 0)]$. Calcoliamo l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x - 3y - z + 2t = 0.$$

Dunque, $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z - 2t = 0\}$.

2. Dal momento che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è ridotta di rango 3 i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre, dall'equazione cartesiana di V vediamo subito che $w_1, w_2, w_3 \in V$ e, essendo $\dim V = 3$, ricaviamo immediatamente che $\mathcal{F}$ è una sua base.

Da $|M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)| = h^2 - 1$, vediamo che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = 1$. In tal caso:
$$M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,0),(0,1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{F}} = (a,b,c),\ a + 2c = 0,\ b - c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{F}} = (-2c, c, c)\} = \\ &= \mathscr{L}((-2,1,1)_{\mathcal{F}}) = \mathscr{L}(-2w_1 + w_2 + w_3) = \mathscr{L}((-5,1,0,-1)). \end{aligned}$$
Sia $h = -1$. In tal caso:
$$M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,0),(-2,-1,-1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{F}} = (a,b,c),\ a - 2b = 0,\ b + c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathcal{F}} = (2b, b, -b)\} = \\ &= \mathscr{L}((2,1,-1)_{\mathcal{F}}) = \mathscr{L}(2w_1 + w_2 - w_3) = \mathscr{L}((3,-1,2,1)). \end{aligned}$$

3. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & h+1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 2 \\ 0 & h & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & -h & 1 \\ 0 & 0 & -1+h^2 & 1-h \end{array}\right)$$
Sia $h \neq \pm 1$. Risolviamo il sistema:
$$\begin{cases} a + (h-1)b + (h+1)c = 1 \\ b - hc = 1 \\ (h^2-1)c = 1 - h \end{cases} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{cases} c = -\dfrac{1}{h+1} \\ b = \dfrac{1}{h+1} \\ a = \dfrac{h+3}{h+1}. \end{cases}$$
Dunque:
$$f^{-1}(1,2,1) = \left\{\frac{h+3}{h+1}w_1 + \frac{1}{h+1}w_2 - \frac{1}{h+1}w_3\right\} = \left\{\left(\frac{2h+5}{h+1}, -\frac{1}{h+1}, \frac{2}{h+1}, \frac{h+2}{h+1}\right)\right\}.$$
Sia $h = 1$. La matrice ridotta diventa:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0, \end{array}\right)$$

per cui il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c + 1 \\ b = c + 1. \end{cases}$$

Dunque:

$$f^{-1}(1,2,1) = \{(-2c+1)w_1 + (c+1)w_2 + cw_3 \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(-5c+1, c, 1, -c+1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Sia $h = -1$. In tal caso, la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dunque, il sistema è impossibile e $f^{-1}(1,2,1) = \emptyset$.

4. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 0 \\ 1 & -1-T & 0 \\ -1 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2+2T).$$

Dunque, gli autovalori sono 0, 2 e -2. Quindi, essendo tutti distinti di molteplicità algebrica 1 A è certamente diagonalizzabile. Calcoliamo l'autospazio V_0:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y = 0,\ -2x+2z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

Calcoliamo l'autospazio V_2:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y = 0\} = \mathscr{L}((0,0,1)).$$

Calcoliamo l'autospazio V_{-2}:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$V_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Dunque, posti:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha che $P^{-1}AP = D$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Verificare che le rette:
$$r\colon \begin{cases} z=1 \\ y=3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y=0 \\ x=2z \end{cases}$$
sono sghembe. Determinare le equazioni della retta t parallela all'asse $\vec{y}$ e complanare con r e s.

2. Nel piano $z=0$ si considerino i punti $A=(1,1)$, $B=(2,-1)$, $C=(0,1)$ e $D=(-1,-1)$. Scrivere l'equazione della parabola p passante per detti punti. Determinarne vertice, asse e un'equazione canonica di p.

3. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica:
$$\begin{cases} 4x^2-y^2-2x+2y=0 \\ z=0, \end{cases}$$
la retta $x=y=z$ e il punto $A=(0,0,1)$.

Soluzione

1. Dal seguente determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$
vediamo che le rette sono sghembe. Osserviamo, poi, che il generico punto della retta r è $R=(a,3a,1)$, mentre il generico punto della retta s è $S=(2b,0,b)$. Quindi, la retta t cercata ha parametri direttori $(a-2b,3a,1-b)$, per qualche $a,b\in\mathbb{R}$. Essa è parallela all'asse $\vec{y}$ se:
$$\begin{cases} a-2b=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1. \end{cases}$$
Possiamo, perciò, dire che la retta t passa per i punti $(2,6,1)$ e $(2,0,1)$ e ha, dunque, equazioni:
$$t\colon \begin{cases} x=2 \\ z=1. \end{cases}$$

2. Il fascio passante per i 4 punti ha equazione:
$$h(y-1)(y+1)+(x-y)(x+y-1)=0 \Rightarrow x^2+(h-1)y^2-x+y-h=0.$$
La matrice associata A è:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$
Chiaramente $|A|=0$ solo per $h=1$ e per tale valore otteniamo la conica di equazione $y=-x^2+x+1$, che è la parabola p cercata. È immediato vedere che il vertice della parabola è il punto $V=(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ e che l'asse di simmetria è la retta $x=\frac{1}{2}$.
Cerchiamo una sua equazione canonica. Le matrici associate alla parabola $x^2-x+y-1=0$ sono:
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
per cui $|B|=-\frac{1}{4}$ e $\mathrm{Tr}(A)=1$. La forma canonica di p è del tipo $\beta Y^2=2\gamma X$, dove $\beta=\mathrm{Tr}(A)=1$ e $|B|=-\beta\gamma^2$. Quindi, $\beta=1$ e possiamo scegliere $\gamma=\frac{1}{2}$, per cui un'equazione canonica della parabola è $Y^2=X$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersechiamo queste quadriche con la retta data:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b + c + 3)x^2 + dx = 0 \\ y = x \\ z = x. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a + b + c + 3 = 0$ e $d = 0$. Quando imponiamo il passaggio per il punto $(0, 0, 1)$ troviamo $c + d = 0$. Dunque, le quadriche cercate hanno equazione:

$$4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z[ax + (-a - 3)y] = 0 \Rightarrow 4x^2 - y^2 + axz + (-a - 3)yz - 2x + 2y = 0.$$

Le matrici associate a queste quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{-a-3}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{-a-3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & \frac{-a-3}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{-a-3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = \frac{9}{4}$ e $|A| = \frac{-3a^2-24a-36}{4}$. Quindi, si conclude immediatamente che per $a = -2$ e $a = -6$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici, mentre per $a \neq -2, -6$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici (in quanto le quadriche ottenute sono certamente reali).