Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Settembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i sottospazi:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0,\ 2x + y - z + 2t = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + ht = 0,\ y + hz = 0\},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare $V + W$ e $V \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, i casi in cui la somma è diretta.

2. È assegnato l'endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   con $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per f.

3. Determinare il valore di h per il quale la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo semplice di V.

4. È assegnato l'endomorfismo $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$g(x, y, z, t) = (-x - t, hy - z, (h-1)z, -x + (h-1)t)$$

   per ogni $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, con $h \in \mathbb{R}$. Studiare l'endomorfismo $f + g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, Ker f e Im f.

Soluzione

1. Si vede facilmente che $V = \mathscr{L}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0))$ e $W = \mathscr{L}((-h, 0, 0, 1), (0, -h, 1, 0))$, per cui $\dim V = \dim W = 2$ e:

$$V + W = \mathscr{L}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0), (-h, 0, 0, 1), (0, -h, 1, 0)).$$

   Calcoliamone la dimensione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1-h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui per $h \neq 1, -1$ $\dim(V+W) = 4 \Rightarrow V+W = \mathbb{R}^4$. In tal caso, dalla formula di Grassmann vediamo che $\dim(V \cap W) = 0$, per cui $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$ e, dunque, $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Sia $h = 1$. In tal caso, $V = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0))$, $W = \mathscr{L}((-1,0,0,1),(0,-1,1,0))$ e:

$$V+W = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,0,1),(0,-1,1,0)) = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0),(0,-1,1,0)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che i tre generatori di $V+W$ sono anche linearmente indipendenti e individuano una base di $V+W$, per cui $\dim(V+W) = 3$. Dalla formula di Grassmann otteniamo che $\dim(V \cap W) = 1$ e, dato che chiaramente $(1,0,0,-1) \in V \cap W$, allora $V \cap W = \mathscr{L}((1,0,0,-1))$. In tal caso, la somma non è diretta.

Sia $h = -1$. In tal caso, $V = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0))$, $W = \mathscr{L}((-1,0,0,-1),(0,1,1,0))$ e:

$$V+W = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,0,-1),(0,1,1,0)) = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,0,-1)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

vediamo che i tre generatori di $V+W$ sono anche linearmente indipendenti e individuano una base di $V+W$, per cui $\dim(V+W) = 3$. Dalla formula di Grassmann otteniamo che $\dim(V \cap W) = 1$ e, dato che chiaramente $(0,1,1,0) \in V \cap W$, allora $V \cap W = \mathscr{L}((0,1,1,0))$. Nemmeno in questo caso la somma è diretta.

2. Si vede che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & 1-T & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-T & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (T+1)^2(T-3)^2,$$

per cui gli autovalori sono -1 e 3, con $m_{-1} = 2$ e $m_3 = 2$. f è semplice se contemporaneamente si ha $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$ e $\dim V_3 = m_3 = 2$.

Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:

$$M(f_{-1}) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(M(f_{-1})) = 2$ e, dunque, $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$.

Sia $T = 3$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:

$$M(f_3) = M(f) - 3I = \begin{pmatrix} -2 & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & h+1 & h+1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h+2 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(M(f_3)) = 2$ per $h = -1$ e $\rho(M(f_3)) = 3$ per $h \neq -1$. Dunque, $\dim V_3 = 1 < m_3 = 2$ per $h \neq -1$, mentre $\dim V_3 = m_3 = 2$ per $h = -1$. Questo vuol dire che f è semplice per $h = -1$, unico caso in cui è, dunque, possibile determinare una base di autovettori per f. Sia, perciò, $h = -1$. Sappiamo che:

$$V_3 = \operatorname{Ker} f_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + 2t = 0,\ -2y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$$

e per quanto visto prima:

$$V_{-1} = \operatorname{Ker} f_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+2t=0,\ 2y+2z=0\} = \mathscr{L}\left((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\right).$$

Dunque, una base d autovettori per f nel caso $h=-1$ è $[(1,0,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)]$.

3. Sappiamo che $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,0,-1), f(0,1,1,0))$. Da:

$$M(f)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & h+1 & h+1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

vediamo che $f(1,0,0,-1) = (-1,0,0,1)$. Da:

$$M(f)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & h+1 & h+1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2h+2\\3\\3\\0\end{pmatrix}$$

vediamo che $f(0,1,1,0) = (2h+2,3,3,0)$. Dunque, $f(V) = \mathscr{L}\left((-1,0,0,1),(2h+2,3,3,0)\right)$ e $f(V) \subseteq V$ se $(-1,0,0,1),(2h+2,3,3,0) \in V$, cosa che accade per $h=-1$. Ciò vuol dire che per $h=-1$ la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo di V. Esso è semplice in quanto:

$$\begin{aligned} f|_V(1,0,0,-1) &= f(1,0,0,-1) = (-1,0,0,1) = -1\cdot(1,0,0,-1)\\ f|_V(0,1,1,0) &= f(0,1,1,0) = (0,3,3,0) = 3\cdot(0,1,1,0). \end{aligned}$$

Ciò, infatti, significa che $[(1,0,0,-1),(0,1,1,0)]$ è una base di autovettori per $f|_V$, che è, dunque, semplice.

4. Dato che:

$$M(g) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & h & -1 & 0\\ 0 & 0 & h-1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & h-1\end{pmatrix},$$

allora:

$$M(f+g) = M(f)+M(g) = \begin{pmatrix}0 & h+1 & h+1 & 1\\ 0 & h+1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & h & 0\\ 1 & 0 & 0 & h\end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M(f+g)| = -(h^2+h-2) \neq 0$ per $h \neq 1,-2$. Quindi, per $h \neq 1,-2$ $f+g$ è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva e si ha $\operatorname{Ker}(f+g) = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im}(f+g) = \mathbb{R}^4$.

Sia $h=1$. Si ha:

$$M(f+g) = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im}(f+g) = \rho(M(f+g)) = 3$ e una sua base è $[(0,0,0,1),(2,2,2,0),(1,0,0,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker}(f+g) = 1$ e:

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y+2z+t=0,\ 2y+z=0,\ x-z=0\} = \mathscr{L}\left((2,-1,2,-2)\right).$$

Sia $h=-2$. Si ha:

$$M(f+g) = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im}(f+g) = \rho(M(f+g)) = 3$ e una sua base è $[(0,0,0,1), (-1,1,-2,0), (1,0,0,-2)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker}(f+g) = 1$ e:

$$\operatorname{Ker}(f+g) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y-z+t=0,\ -y+z=0,\ x-4y=0\} = \mathscr{L}\left((4,1,1,2)\right).$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta $r\colon x+y=z=0$ e il piano $\pi\colon x=1$, determinare la proiezione ortogonale s di r su π e la retta t simmetrica di r rispetto a π.

2. Nel piano $z=0$ sono dati i punti $A=(1,1,0)$, $B=(1,-1,0)$, $C=(0,-1,0)$, $D=(0,0,0)$ ed $E=(-1,0,0)$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ passante per i punti A, B, C e D e determinare il centro di simmetria della conica passante per i punti A, B, C, D ed E.

3. Determinare il paraboloide contenente la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2+xy-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e le rette $p_1\colon x=z-1=0$ e $p_2\colon x+y=z-1=0$. Specificare la natura del paraboloide.

Soluzione

1. Si vede facilmente che $r \cap \pi = A$, dove $A=(1,-1,0)$. Prendiamo un punto di r, per esempio $O=(0,0,0)$. La retta q passante per O e ortogonale a π ha equazioni $q\colon y=z=0$ e il punto H intersezione di q e π è $H=(1,0,0)$. Allora:

$$s = AH\colon \begin{cases} x=1 \\ z=0. \end{cases}$$

Sia $O'=(a,b,c)$ il simmetrico di O rispetto ad H. Deve essere:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}=1 \\ \dfrac{b}{2}=0 \\ \dfrac{c}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=0. \end{cases}$$

Dunque, $O'=(2,0,0)$ e:

$$t = AO'\colon \begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0. \end{cases}$$

2. Le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $x(x-1)=0$, $(x-y)(y+1)=0$ e $(x+y)(2x-y-1)=0$. Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$hx(x-1)+(x-y)(y+1)=0 \Rightarrow hx^2+xy-y^2+(1-h)x-y=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1-h}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-h}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora $|B| = \frac{h^2-2h}{4}$, per cui troviamo le coniche spezzate del fascio per $h = 0$ e $h = 2$, mentre per $h \neq 0, 2$ esse sono irriducibili. Inoltre, $|A| = -h - \frac{1}{4}$. Dunque, per $h < -\frac{1}{4}$ abbiamo delle ellissi reali, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = -\frac{1}{4}$ abbiamo una parabola; per $h > -\frac{1}{4}$, $h \neq 0, 2$, abbiamo delle iperboli, tra le quali l'equilatera si ottiene per $h = 1$.

La conica passante per i 5 punti dati è la conica del fascio passante per E ed essa si ottiene per $h = \frac{1}{2}$, per cui essa ha equazione:

$$x^2 + 2xy - 2y^2 + x - 2y = 0,$$

è un'iperbole e ha matrice associata:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{2} = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, la conica ha centro di simmetria $(0, -\frac{1}{2})$.

3. Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$x^2 + xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersecandola con la retta p_1 abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} by + c + d - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

p_1 è contenuta nella quadrica se $b = c + d - 1 = 0$. Analogamente, intersechiamo la quadrica con la retta p_2:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = -x \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)x + c + d - 1 = 0 \\ y = -x \\ z = 1. \end{cases}$$

p_2 è contenuta nella quadrica se $a - b = c + d - 1 = 0$. Dunque, otteniamo le condizioni:

$$\begin{cases} b = 0 \\ c + d - 1 = 0 \\ a - b = 0 \\ c + d - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 1 - c, \end{cases}$$

per cui il paraboloide cercato è tra le quadriche di equazione:

$$x^2 + xy + cz^2 + (1-c)z - 1 = 0.$$

Le matrici associate a queste quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \frac{1-c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-c}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Essendo $|A| = -\frac{c}{4}$, vediamo subito che il paraboloide cercato si ottiene per $c = 0$, cioè ha equazione $x^2 + xy + z - 1 = 0$. Esso è effettivamente un paraboloide in quanto $|B| = \frac{1}{16}$ ed è ovviamente un paraboloide iperbolico.