Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 23 Novembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (h, h+2, 1) \\ f(1,0,-1) &= (0, h+1, 0) \\ f(1,1,1) &= (h+1, h+2, 2), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Determinare la controimmagine $f^{-1}((1,-1,-1))$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ e studiarne la semplicità.

Soluzione

1. Dalle assegnazioni otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) = (h, h+2, 1) \\ f(e_1) - f(e_3) = (0, h+1, 0) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+1, h+2, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1, h+1, 1) \\ f(e_2) = (h-1, 1, 0) \\ f(e_3) = (1, 0, 1). \end{cases}$$

Dunque:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui $|M(f)| = -(h+1)(h-1)$. Possiamo, perciò, affermare che per $h \neq 1, -1$ f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e f è sia iniettiva che suriettiva.

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,0,1), (0,1,0)]$. Inoltre, la sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - x = 0.$$

Dunque, per $h = 1$ $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0,\ 2x + y = 0\} = \mathscr{L}\left((1, -2, -1)\right).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1, 0, 1), (-2, 1, 0)]$. Inoltre, la sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - 2y - x = 0.$$

Dunque, per $h = 1$ $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0,\ y = 0\} = \mathscr{L}\left((1, 0, -1)\right).$$

2. Il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h-1 & 1 \\ h+1 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2 - 2T + 1 - h^2].$$

Dunque, gli autovalori sono 1, $1 + h$ e $1 - h$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0$. Questo vuol dire che per $h \neq 0$ f è certamente semplice. Invece, per $h = 0$ vediamo che 1 è l'unico autovalore per f e che esso ha molteplicità algberica pari a 3. Dunque, per $h = 0$ f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 3$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo subito che $\rho(M(f_1)) = 2$, per cui $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 3 = m_1$ e ne deduciamo che per $h = 0$ f non è semplice.

3. Per calcolare $f^{-1}\left((1, -1, -1)\right)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & 1 & 1 \\ h+1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h-1 & 1 & 1 \\ h+1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-h & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Per $h \neq 1, -1$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x + (h-1)y + z = 1 \\ (h+1)x + y = -1 \\ (1-h)y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-h} \\ y = \dfrac{2}{h-1} \\ z = \dfrac{2-h}{h-1}, \end{cases}$$

per cui, per $h \neq 1, -1$, $f^{-1}\left((1, -1, -1)\right) = \left\{\left(\dfrac{1}{1-h}, \dfrac{2}{h-1}, \dfrac{2-h}{h-1}\right)\right\}$.

Per $h = 1$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

da cui vediamo che il sistema è impossibile. Ciò vuol dire che per $h = 1$ $f^{-1}((1,-1,-1)) = \emptyset$.

Per $h = -1$ la matrice diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui abbiamo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = -1 - x. \end{cases}$$

Dunque, per $h = -1$ $f^{-1}((1,-1,-1)) = \{(x,-1,-1-x) \in \mathbb{R}^3\}$.

4. Dal momento che $V = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,1))$, vediamo che $f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,0), f(0,1,1))$. Sappiamo già che $f(1,0,0) = (1, h+1, 1)$. Calcoliamo $f(0,1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & h-1 & 1 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f(0,1,1) = (h,1,1)$ e $f(V) = \mathscr{L}((1,h+1,1),(h,1,1))$. La restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo di V se $f(V) \subseteq V$, cioè se $(1,h+1,1),(h,1,1) \in V$. È semplice vedere che $(1,h+1,1) \in V$ per $h = 0$, mentre $(h,1,1) \in V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Questo vuol dire che il valore per il quale $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \Rightarrow V$ è $h = 0$. Per tale valore abbiamo:

$$g(1,0,0) = f(1,0,0) = (1,1,1)$$
$$g(0,1,1) = f(0,1,1) = (0,1,1).$$

Detta $\mathscr{A} = [(1,1,1),(0,1,1)]$ la base di V che abbiamo considerato, è semplice notare che $g(1,0,0) = (1,0,0) + (0,1,1)$ e che:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{pmatrix} 1-T & 0 \\ 1 & 1-T \end{pmatrix} = (1-T)^2.$$

L'unico autovalore è, perciò, 1 con $m_1 = 2$ e g è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = M^{\mathscr{A}}(g) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(g_1)) = 1$ e $\dim V_1 = 2 - 1 = 1 < 2 = m_1$, da cui deduciamo che g non è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 0, \end{cases}$$

il piano $\pi\colon x - z + 1 = 0$ e il punto $P = (1,0,1)$, determinare la retta s ortogonale a r, parallela a π e passante per P. Calcolare la distanza $d(s,\pi)$ di s da π.

2. Nel piano $z = 0$ sono dati i punti $A = (1,-1,0)$ e $B = (0,2,0)$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passante per i punti A e B e tangenti in essi alla rette, rispettivamente, $t_1\colon x - 1 = z = 0$ e $t_2\colon y - 2 = z = 0$.

3. Data la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

determinare il cono contenente Γ e avente vertice $V_1 = (0, 1, -1)$ e il cilindro contenente Γ e avente vertice $V_2 = (0, 1, -1, 0)$.

Soluzione

1. È semplice vedere che la retta r ha parametri direttori $(4, 3, -1)$, Dunque, se (l, m, n) sono parametri direttori di s, allora si ha:

$$\begin{cases} 4l + 3m - m = 0 \\ l - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -l \\ n = l. \end{cases}$$

Quindi, possiamo dire che $(1, -1, 1)$ sono parametri direttori di s e, perciò, la retta s è data da:

$$s\colon x - 1 = -y = z - 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Inoltre, essendo s parallela a π e dato che $P \in s$:

$$d(s, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Dal momento che la retta AB ha equazioni $3x + y - 2 = z = 0$, le coniche spezzate del fascio sul piano $z = 0$ sono quelle di equazioni $(x - 1)(y - 2) = 0$ e $(3x + y - 2)^2 = 0$. Dunque, sul piano $z = 0$ il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x - 1)(y - 2) + (3x + y - 2)^2 = 0 \Rightarrow 9x^2 + y^2 + (h + 6)xy - (2h + 12)x - (h + 4)y + 2h + 4 = 0.$$

Dal momento che le coniche spezzate del fascio sono solo le due utilizzate per scriverne l'equazione, ne deduciamo che necessariamente $|B| = 0$ solo per $h = 0$ e che, dunque, per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & \dfrac{h+6}{2} \\ \dfrac{h+6}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2 + 12h}{4},$$

vediamo che per $h = -12$ abbiamo una parabola, mentre per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata; per $-12 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, in quanto i punti base sono reali, e per nessun di questi valori abbiamo delle circonferenze; per $h < -12$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Il generico punto $P \in \Gamma$ ha coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$. Dunque, la retta PV_1 ha equazioni:

$$PV_1\colon \frac{x}{\alpha} = \frac{y - 1}{\beta - 1} = z + 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{z+1} \\ \beta = \dfrac{y+z}{z+1}. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$ otteniamo:

$$\frac{x^2}{(z+1)^2} - \frac{x(y+z)}{(z+1)^2} + \frac{(y+z)^2}{(z+1)^2} - 1 = 0,$$

per cui l'equazione del cono cercato è:

$$x^2 - x(y + z) + (y + z)^2 - (z + 1)^2 = 0.$$

Per quel che riguarda il cilindro, la retta PV_2 ha equazioni:

$$\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ y - \beta = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y + z. \end{cases}$$

Dunque, sostituendo in $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$ abbiamo l'equazione del cilindro cercato:

$$x^2 - x(y + z) + (y + z)^2 - 1 = 0.$$