Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Gennaio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ e il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ come base. È assegnato, inoltre, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ h & 0 & h+1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di h, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Mostrare che $v = (2,1,-2,3) \in V$ e che v è autovettore per f per ogni $h \in \mathbb{R}$.
4. Determinare e studiare l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to V$ tale che $g|_V = f$ e $g(0,0,0,1) = (1,1,-1,2)$.

Soluzione

1. Si osserva facilmente che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 3(h+2)$, da cui concludiamo immediatamente che per $h \neq -2$ f è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva. In particolare, per $h \neq -2$ si ha che $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e che $\operatorname{Im} f = V$.

   Sia $h = -2$. In tal caso:

   $$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   da cui osserviamo subito che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$. In particolare, vediamo che:

   $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2,0,-2)_{\mathscr{A}}, (0,3,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(2v_1 - 2v_3, 3v_2) = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2) = \mathscr{L}((1,0,-1,1),(0,1,0,1))$.

   Inoltre, si ha che $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

   $$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a+c=0,\ 3b+c=0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-\tfrac{c}{2}, -\tfrac{c}{3}, c)\} = \\ &= \mathscr{L}((-3,-2,6)) = \mathscr{L}(-3,-2,6,-5). \end{aligned}$$

2. Si vede che:
$$P_(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & 1 \\ 0 & 3-T & 1 \\ h & 0 & h+1-T \end{vmatrix} = (3-T)(1-T)(h+2-T),$$
per cui gli autovalori sono 1, 3 e $h+2$. Essi sono distinti a due a due, ovvero ciascuno di essi ha molteplicità algebrica 1, per $h \neq 1, -1$. Questo vuol dire che per $h \neq 1, -1$ f è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 1$ e $m_3 = 2$. Dunque, si ha che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, cioè $m_1 = \dim V_1 = 1$, e $1 \leq \dim V_3 \leq 2 = m_3$, da cui segue che f è semplice se $\dim V_3 = m_3 = 2$. Sappiamo che $V_3 = \operatorname{Ker} f_3$, dove $f_3 = f - 3i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_3) = M^{\mathscr{A}}(f) - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_3 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_3)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_3$, da cui otteniamo che f non è semplice per $h = 1$.

Sia $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 3, con $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Dunque, si ha che $1 \leq \dim V_3 \leq m_3 = 1$, cioè $m_3 = \dim V_3 = 1$, e $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$, da cui segue che f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$, da cui otteniamo che f non è semplice per $h = -1$.

3. Per fare vedere che $v \in V$ occorre fare vedere che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:
$$v = (2,1,-2,3) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,0) = (a,b,c,a+b),$$
cioè occorre che il seguente sistema abbia soluzioni:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ a+b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2. \end{cases}$$
Dunque, $v \in V$ e $[v]_{\mathscr{A}} = (2,1,-2)$. Per fare vedere che v è autovettore per f occorre calcolare $f(v)$. Da:
$$M^{\mathscr{A}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ h & 0 & h+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$
vediamo che $[f(v)]_{\mathscr{A}} = (2,1,-2)$, cioè $f(v) = 2v_1 + v_2 - 2v_3 = v = 1 \cdot v$. Questo vuol dire che v è autovettore associato all'autovalore 1.

4. Si vede facilmente che $[(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)] = \mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto la seguente matrice è ridotta di rango 4:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Inoltre, da:
$$(1,1,-1,2) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,0) = (a,b,c,a+b),$$

vediamo che:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1, \end{cases}$$

per cui $[g(0,0,0,1)]_{\mathscr{A}} = (1,1,-1)$. Dunque, possiamo dire che:

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ h & 0 & h+1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ h+2 & 0 & h+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq -2$ si ha che $\rho(M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(g)) = 3$ e $\dim \operatorname{Im} g = 3$. Questo significa che per $h \neq -2$ $\operatorname{Im} g = V$, cioè g è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 4 - 3 = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} g &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c,d),\ 2a+c+d=0,\ -2a+3b=0,\ (h+2)a+(h+2)c=0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a, \tfrac{2a}{3}, -a, -a)\} = \mathscr{L}((3,2,-3,-3)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}((3,-2,-3,2)). \end{aligned}$$

Sia $h=-2$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(f)) = 2$. In particolare, vediamo che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2,0,-2)_{\mathscr{A}}, (0,3,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(2v_1 - 2v_3, 3v_2) = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2) = \mathscr{L}((1,0,-1,1),(0,1,0,1)).$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = 4 - \dim \operatorname{Im} g = 2$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} g &= \{v \in \mathbb{R}^4 \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c,d),\ 2a+c+d=0,\ 3b+c+d=0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (\tfrac{-c-d}{2}, \tfrac{-c-d}{3}, c, d)\} = \\ &= \mathscr{L}((-3,-2,6,0)_{\mathscr{B}}, (-3,-2,0,6)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}((-3,-2,6,-5),(-3,-2,0,1)). \end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i punti $A=(1,0,1)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,2,1)$ e $D=(0,-2,0)$. Determinare il piano π passante per i punti A, B e C, l'angolo che la retta AD forma con il piano π e la proiezione ortogonale della retta AD sul piano π.

2. Sul piano coordinato $z=0$ determinare l'iperbole Γ avente per asintoti le rette alle rette $r\colon 2x+y+1=z=0$ e $s\colon x+2y-2=z=0$ e passante per $P=(1,1,0)$. Determinare il centro di simmetria e gli assi di simmetria di Γ.

3. Determinare il cono avente conica all'infinito:

$$C_\infty\colon \begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ t=0. \end{cases}$$

e vertice $V=(0,0,1)$.

Soluzione

1. La retta AB ha equazioni:
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$
Il fascio di piani contenente AB ha equazione:
$$\lambda(x-z) + \mu(x+y-1) = 0.$$
Imponendo il passaggio per C otteniamo $-\lambda + \mu = 0$, per cui il piano π ha equazione $2x + y - z - 1 = 0$. La retta AD ha equazioni:
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - y - 2 = 0. \end{cases}$$
Quindi, vediamo che il vettore $\vec{v}$ di componenti $(1, 2, 1)$ è parallelo ad AD e il vettore $\vec{n}$ di componenti $(2, 1, -1)$ è ortogonale a π. Dato che:
$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{n}} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$
vediamo che $\widehat{\vec{v}\vec{n}} = \frac{\pi}{3}$, per cui la retta AD e π formano un angolo di $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
Il fascio di piani contenente AD ha equazione
$$\lambda(x-z) + \mu(2x - y - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda + 2\mu)x - \mu y - \lambda z - 2\mu = 0.$$
Vogliamo che i vettori di componenti $(\lambda + 2\mu, -\mu, -\lambda)$ e $(2, 1, -1)$ siano ortogonali, cioè $3\lambda + 3\mu = 0$. Dunque, prendendo $\lambda = -1$ e $\mu = 1$ troviamo il piano contenente AD e ortogonale a π, che è $x - y + z - 2 = 0$. Quindi, la proiezione ortogonale di AD sul piano π è la retta di equazioni:
$$\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Il fascio di coniche del piano $z = 0$ avente le due rette date come asintoti ha equazione:
$$(2x + y + t)(x + 2y - 2t) + ht^2 = 0 \Rightarrow (2x + y + 1)(x + 2y - 2) + h = 0.$$
Imponendo il passaggio per P troviamo $h = -4$. Quindi, la conica ha equazione:
$$(2x + y + 1)(x + 2y - 2) - 4 = 0.$$
Il centro di simmetria è il punto d'intersezione dei due asintoti:
$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{5}{3}, \end{cases}$$
per cui esso è il punto $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$. Gli assi di simmetria, poi, sono le bisettrici degli asintoti:
$$\frac{|2x + y + 1|}{5} = \frac{|x + 2y - 2|}{5},$$
da cui otteniamo gli assi di simmetria dei equazioni $x - y + 3 = 0$ e $3x + 3y - 1 = 0$.

3. Le quadriche aventi C_∞ come conica all'infinito hanno equazione:
$$x^2 + y^2 - z^2 + t(ax + by + cz + dt) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & d \end{pmatrix}.$$

Imponiamo che V sia vertice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} = 0 \\ -1 + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{c}{2} + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -1. \end{cases}$$

Dunque, il cono cercato ha equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$.