CdL in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Giugno 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i due sottospazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\}$ e $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$, con $w_1 = (1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_3 = (h, 0, 0, 1)$, $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$.
2. Studiare l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ definita dalle relazioni:
$$\begin{aligned} f(1,1,0,0) &= (-2h-1, h-1, -3, -3) \\ f(0,0,1,0) &= (3h+3, 3, 5, 3) \\ f(0,0,0,1) &= (-3, h-3, -3, -1), \end{aligned}$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale f è un endomorfismo, verificare che esso è semplice e determinare una base di autovettori di V per f.
4. Per il valore di h di cui al punto 3, posto $Z = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0))$, determinare il generico endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induca l'endomorfsimo $f\colon V \to V$ e la cui restrizione a Z induca un endomorfismo su Z. Verificare che φ è semplice e determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^4$ per φ.

Soluzione

1. È immediato notare che la matrice:
$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, per cui $\dim W = 3$. Determiniamo la sua equazione cartesiana:
$$\begin{vmatrix} h & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - ht = 0.$$
Dunque, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - ht = 0\}$ e:
$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ x - y - ht = 0\}$$
Quindi, si osserva immediatamente che per $h = 0$ $V = W$, per cui $V \cap W = V$ e $V + W = V$. Invece, per $h \neq 0$, si ha:
$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ t = 0\},$$
per cui $\dim(V \cap W) = 2$. In tal caso, inoltre, si ha:
$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 4,$$
per cui $V + W = \mathbb{R}^4$.

2. Siano $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,0)$ e $v_3 = (0,0,0,1)$. È semplice osservare che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V e, per quanto detto in precedenza, $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$ è una base di W.

   Calcoliamo $[f(v_1)]_{\mathscr{B}} = [(-2h-1, h-1, -3, -3)]_{\mathscr{B}}$:

$$(-2h-1, h-1, -3, -3) = aw_1 + w_2 + cw_3 = (a+hc, a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a+hc = -2h-1 \\ a = h-1 \\ b = -3 \\ c = -3, \end{cases}$$

   per cui $[f(v_1)]_{\mathscr{B}} = [(-2h-1, h-1, -3, -3)]_{\mathscr{B}} = (h-1, -3, -3)$. Analogamente:

$$(3h+3, 3, 5, 3) = aw_1 + w_2 + cw_3 = (a+hc, a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a+hc = 3h+3 \\ a = 3 \\ b = 5 \\ c = 3, \end{cases}$$

   per cui $[f(v_2)]_{\mathscr{B}} = [(3h+3, 3, 5, 3)]_{\mathscr{B}} = (3, 5, 3)$. E:

$$(-3, h-3, -3, -1) = aw_1 + w_2 + cw_3 = (a+hc, a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} a+hc = -3 \\ a = h-3 \\ b = -3 \\ c = -1, \end{cases}$$

   per cui $[f(v_3)]_{\mathscr{B}} = [(-3, h-3, -3, -1)]_{\mathscr{B}} = (h-3, -3, -1)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} h-1 & 3 & h-3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Dato che $|M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)| = 10h - 4$, vediamo che per $h \neq \frac{2}{5}$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0\}$ e $\operatorname{Im} f = W$.

   Sia $h = \frac{2}{5}$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 3 & -\frac{13}{5} \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 3 & -\frac{13}{5} \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   per cui $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è data da:

$$[f(v_1), f(v_2)] = \left[\left(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}, -3, -3 \right), \left(\frac{21}{5}, 3, 5, 3 \right) \right].$$

   Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{ v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -\frac{3}{5}a + 3b - \frac{13}{5}c = 0,\ -10b + 10c = 0 \right\} = \\ &= \left\{ v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = \left(\frac{2}{3}b, b, b \right) \right\} = \mathscr{L}(2v_1 + 3v_2 + 3v_3) = \mathscr{L}((2,2,3,3)). \end{aligned}$$

3. È evidente che per $h = 0$ f è un isomorfismo di V, in quanto, come abbiamo visto, per tale valore $V = W$. D'altronde, si vede che $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3) \in V$ solo per $h = 0$. Inoltre, osserviamo che per tale valore $\mathscr{B} = \mathscr{A}$. Dunque, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ è tale che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 3 & -3 \\ -3 & 5-T & -3 \\ -3 & 3 & -1-T \end{vmatrix} = -(T+1)(T-2)^2.$$
Gli autovalori sono -1 e 2, con $m_{-1} = 1$ e $m_2 = 2$. Dovendo essere necessariamente $\dim V_{-1} = m_{-1}$, f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_2) = M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\dim V_2 = 2 = m_2$ e f è semplice. Inoltre:
$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -3a+3b-3c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, a+c, c)\} = \mathscr{L}(v_1+v_2, v_2+v_3) = \mathscr{L}((1,1,1,0),(0,0,1,1)). \end{aligned}$$
Calcoliamo V_{-1}. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, dove $f_{-1} = f + i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque:
$$\begin{aligned} V_{-1} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 3b-3c = 0,\ -3a+3b = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,a,a)\} = \mathscr{L}(v_1+v_2+v_3) = \mathscr{L}((1,1,1,1)). \end{aligned}$$
Dunque, una base di autovettori è $[(1,1,1,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1)]$.

4. Dato che $\dim Z = 1$ ed è generato da $(0,1,0,0)$, dire che la restrizione di φ a Z induce un endomorfismo significa dire che $(0,1,0,0)$ è autovettore, per cui:
$$\varphi(0,1,0,0) = (0,a,0,0),$$
per qualche $a \in \mathbb{R}$. Inoltre, dato che la restrizione di φ a V induce f, la base di autovettori $[(1,1,1,0),$ $(0,0,1,1),(1,1,1,1)]$ di V per f è un insieme libero di autovettori per φ e si ha:
$$\begin{aligned} \varphi(1,1,1,0) &= f(1,1,1,0) = (2,2,2,0) \\ \varphi(0,0,1,1) &= f(0,0,1,1) = (0,0,2,2) \\ \varphi(1,1,1,1) &= f(1,1,1,1) = (-1,-1,-1,-1) \end{aligned}$$
Dal momento che $(0,1,0,0) \notin V$, $V + Z = \mathbb{R}^4$ e $[(1,1,1,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,0,0)]$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e le assegnazioni:
$$\begin{aligned} \varphi(1,1,1,0) &= f(1,1,1,0) = (2,2,2,0) \\ \varphi(0,0,1,1) &= f(0,0,1,1) = (0,0,2,2) \\ \varphi(1,1,1,1) &= f(1,1,1,1) = (-1,-1,-1,-1) \\ \varphi(0,1,0,0) &= (0,a,0,0) \end{aligned}$$
definiscono gli endomorfismi φ cercati, che, quindi, sono tutti semplici e per i quali $[(1,1,1,0),(0,0,1,1),$ $(1,1,1,1),(0,1,0,0)]$ è una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnati il punto $A = (-1, 1, 1)$, il piano $\pi\colon x + y - z - 1 = 0$ e la retta r di equazioni:

$$r\colon \begin{cases} x + 3z - 4 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

   (a) Determinare la retta s passante per A, ortogonale a r e parallela a π. Verificare che r e s sono sghembe e determinare la distanza tra r e s.

   (b) Scrivere l'equazione del piano π' simmetrico di π rispetto al piano $\alpha\colon x - z + 1 = 0$.

2. Studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + \lambda xy + y^2 - 3 - \lambda = 0,$$

determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate.

3. Determinare l'equazione del cilindro che ha come direttrice la circonferenza di Φ e le generatrici parallele alla retta $x = y = z$.

Soluzione

1. Osserviamo che la retta r ha parametri direttori $(-3, -2, 1)$.

   (a) Dunque, se (l, m, n) sono parametri direttori della retta s deve essere:

$$\begin{cases} -3l - 2m + n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2l \\ n = -l, \end{cases}$$

per cui $(1, -2, -1)$ sono parametri direttori di s ed essa ha equazioni:

$$s\colon \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Dato che r e s sono ortogonali, esse sono sghembe se non sono incidenti. Dato che il sistema:

$$\begin{cases} x + 3z - 4 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

è impossibile, possiamo dire che sono sghembe. Per determinare la distanza tra le due rette, occorre determinare il piano β contenente r e parallelo a s. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x + 3z - 4) + \mu(y + 2z - 4) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y + (3\lambda + 2\mu)z - 4\lambda - 4\mu = 0.$$

Per essere parallelo a s i vettori di componenti $(\lambda, \mu, 3\lambda + 2\mu)$ e $(1, -2, -1)$ devono essere ortogonali, per cui:

$$\lambda - 2\mu - 3\lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -2\mu.$$

Dunque, il piano β ha equazione $2x - y + 4z - 4 = 0$ e:

$$d(r, s) = d(A, \beta) = \frac{|-2 - 1 + 4 - 4|}{\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

   (b) Osserviamo che i piani α e π non sono paralleli, per cui la retta:

$$p = \alpha \cap \pi\colon \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

è una retta propria. Osserviamo, poi, che il punto $P = (0, 1, 0) \in \pi$ e $P \notin \alpha$. Ciò vuol dire che, detto P' il simmetrico di P rispetto ad α, il piano cercato è quello contenente la retta p e il punto P'.

La retta t passante per P ed ortogonale ad α ha equazioni:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -t, \end{cases}$$

per cui il punto $H = t \cap \alpha$ è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -t \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, $H = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ e il punto $P' = (a, b, c)$ è il simmetrico di P rispetto ad H, per cui deve essere:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{b+1}{2} = 1 \\ \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Il piano π' cercato è il piano contenente r e il punto $(-1, 1, 1)$. I piani contenenti p hanno equazione:

$$\lambda(x - z + 1) + \mu(x + y - z - 1) = 0$$

Imponendo il passaggio per $(-1, 1, 1)$ abbiamo $-\lambda - 2\mu = 0$, per cui $\lambda = -2\mu$ e $\pi' \colon x - y - z + 3 = 0$.

2. Osserviamo che per $\lambda = \infty$ abbiamo la conica di equazione $xy - 1 = 0$, che è un'iperbole equilatera. Inoltre, da:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\lambda}{2} & 0 \\ \dfrac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$

vediamo che $|B| = (-3 - \lambda)\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right)$. Dunque, per $\lambda \neq -3, \pm 2$ abbiamo delle coniche irriducibili. Invece, per $\lambda = -3$ abbiamo:

$$x^2 - 3xy + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}y\right) = 0.$$

Per $\lambda = 2$ abbiamo:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + y + \sqrt{5})(x + y - \sqrt{5}) = 0.$$

Per $\lambda = -2$ abbiamo:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + y + 1)(x + y - 1) = 0.$$

Troviamo i punti base:

$$\begin{cases} (x + y + \sqrt{5})(x + y - \sqrt{5}) = 0 \\ (x + y + 1)(x + y - 1) = 0. \end{cases}$$

Dal sistema troviamo i punti $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ e $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$. Poi, essendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\lambda}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2}{4},$$

vediamo che per $-2 < \lambda < 2$ abbiamo delle ellissi reali, tra le quali si ottiene una circonferenza per $\lambda = 0$; per $\lambda = \pm 2$ non abbiamo parabole, ma coniche spezzate; per $\lambda < -2$, $\lambda \neq -3$, e $\lambda > 2$ abbiamo delle iperboli. L'unica iperbole equilatera del fascio è quella che si ottiene per $\lambda = \infty$.

3. La circonferenza del fascio ha equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Il vertice del cilindro è il punto $V = (1, 1, 1, 0)$. Il generico punto della conica è $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove $\alpha^2 + \beta^2 - 3 = 0$. La retta PV ha equazioni:

$$\begin{cases} x - \alpha = z \\ y - \beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 + \beta^2 - 3 = 0$ troviamo l'equazione del cilindro:

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 - 3 = 0.$$