Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 2 Luglio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito B

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato lo spazio vettoriale V avente base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$, con $v_1 = (1,0,0,-1)$, $v_2 = (0,1,0,-2)$ e $v_3 = (0,0,1,-1)$ ed è assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to V$ tale che:

$$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -k & -k & k & -2k \\ 1-k & -k & -1-k & 1 \end{pmatrix},$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Mostrare che $\operatorname{Ker} f \subset V$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

2. Dato $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0,\ z = 0\}$, calcolare $f(W)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, specificandone la dimensione e calcolandone le equazioni cartesiane.

3. Detta $g = f|_V\colon V \to V$, studiare la semplicità di g al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4. È assegnato l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

   $$\varphi(x,y,z) = (x+y-kz, -kx-y+z, 2x+y+kz),$$

   per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calcolare $\varphi^{-1}((-k,1,0))$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Da:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z + t = 0,$$

   osserviamo che $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0\}$. Riduciamo la matrice data:

   $$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -k & -k & k & -2k \\ 1-k & -k & -1-k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con } h\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ k & 3k & 3k & 0 \\ 0 & 2k-2 & 2k-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, vediamo subito che per $k \neq 0, 1$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)) = 3$, cioè $\operatorname{Im} f = V$ e f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

   $$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0,\ kx + 3ky + 3kz = 0,\ (2k-2)y + (2k-2)z = 0\} = \\ = \mathscr{L}((0,1,-1,-1)).$$

   È evidente che $\operatorname{Ker} f \subset V$.

Sia $k = 1$. In tal caso, vediamo che:

$$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con } h\neq 0} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è individuata dalla prima e dalla quarta colonna di $M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)$:

$$[v_1 - v_2, v_1 - 2v_2 + v_3] = [(1,-1,0,1),(1,-2,1,2)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0,\ x + 3y + 3z = 0\}.$$

Guardando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$ e di V è evidente che anche in questo caso $\operatorname{Ker} f \subset V$.

Sia $k = 0$. In tal caso, vediamo che:

$$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è individuata dalla prima e dalla seconda colonna di $M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)$:

$$[v_1 + v_3, v_1] = [(1,1,0,-3),(1,0,0,-1)].$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z + t = 0,\ x - z + t = 0\}.$$

Anche in questo caso, guardando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$ e di V è evidente che $\operatorname{Ker} f \subset V$.

2. Sappiamo che $W = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,0,0,1))$, per cui:

$$f(W) = \mathscr{L}(f(1,0,0,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}(v_1 - kv_2 + (1-k)v_3, v_1 - 2kv_2 + v_3) = \\ = \mathscr{L}((1,-k,1-k,3k-2),(1,-2k,1,4k-2)).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1-k & 3k-2 \\ 1 & -2k & 1 & 4k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1-k & 3k-2 \\ 0 & -k & k & k \end{pmatrix},$$

vediamo che per $k \neq 0$ $\dim f(W) = 2$ e i due vettori dati individuano una sua base. Per $k = 0$, invece, $\dim f(W) = 1$ e $f(W) = \mathscr{L}((1,0,1,-2))$. Cerchiamo e equazioni cartesiane. Sia $k \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1-k & 3k-2 \\ 0 & -k & k & k \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -k & 1-k & 3k-2 \\ 0 & -k & k & k \\ 0 & 0 & (2k-1)x + y + z & (-2k+2)x + y + t \end{pmatrix},$$

per cui in tal caso:

$$f(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (2k-1)x + y + z = 0,\ (-2k+2)x + y + t = 0\}.$$

Sia $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & y & -x+z & 2x+t \end{pmatrix},$$

per cui $f(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0,\ -x + z = 0,\ 2x + t = 0\}$.

3. Occorre scrivere $M^{\mathscr{A}}(g)$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -k & -k & k & -2k \\ 1-k & -k & -1-k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$$

otteniamo che $[f(v_1)]_{\mathscr{A}} = (0, k, -k)$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -k & -k & k & -2k \\ 1-k & -k & -1-k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k \\ -k-2 \end{pmatrix}$$

otteniamo che $[f(v_2)]_{\mathscr{A}} = (0, 3k, -k-2)$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -k & -k & k & -2k \\ 1-k & -k & -1-k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k \\ -k-2 \end{pmatrix}$$

otteniamo che $[f(v_3)]_{\mathscr{A}} = (0, 3k, -k-2)$. Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 3k & 3k \\ -k & -k-2 & -k-2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 \\ k & 3k-T & 3k \\ -k & -k-2 & -k-2-T \end{vmatrix} = -T^2(T-2k+2).$$

Dunque, per $k \neq 1$ abbiamo gli autovalori 0 e $2k-2$, dove $m_0 = 2$ e $m_{2k-2} = 1$. Per $k = 1$ abbiamo l'autovalore 0 con $m_0 = 3$.

Sia $k \neq 1$. In tal caso, g è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} g$:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 3k & 3k \\ -k & -k-2 & -k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con } h \neq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 3k & 3k \\ 0 & 2k-2 & 2k-2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $k \neq 0, 1$ si ha $\dim \operatorname{Ker} g = 1 < 2 = m_0$. Quindi, per $k \neq 0, 1$ g non è semplice. Sia $k = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

per cui in tal caso $\dim \operatorname{Ker} g = 2 = m_0$ e g è semplice.

Sia $k = 1$. In tal caso, g è semplice se $\dim \operatorname{Ker} g = m_0 = 3$. Tuttavia:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Ker} g = 2 < 3 = m_0$ e g non è semplice.

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & | & -k \\ -k & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & k & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, con} k \neq 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k & | & -k \\ 1-k & 0 & 1-k & | & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 & | & k-1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, vediamo subito che per $k \neq 1, \frac{1}{2}$ abbiamo una sola soluzione, mentre per $k = \frac{1}{2}$ non ci sono soluzioni, per cui, in questo caso, si ha $\varphi^{-1}((-\frac{1}{2}, 1, 0)) = \emptyset$.

Sia $k \neq 1, \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + y - kz = -k \\ (1-k)x + (1-k)z = 1-k \\ (2k-1)z = k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{2k-1} \\ y = \dfrac{k^2+k}{1-2k} \\ z = \dfrac{k-1}{2k-1}. \end{cases}$$

Dunque, in questo caso:

$$\varphi^{-1}((-k, 1, 0)) = \left\{ \left(\frac{k}{2k-1}, \frac{k^2+k}{1-2k}, \frac{k-1}{2k-1} \right) \right\}.$$

Sia $k = 1$. In tal caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ -1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$\varphi^{-1}(-1, 1, 0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = -1,\ x + 2z = 1\} = \{(1-2z, 3z-2, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 3, \end{cases}$$
mostrare che esse sono sghembe e determinare la retta ortogonale e incidente entrambe le rette date.

2. Nel piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 - 2hxy - hy^2 + 2x + 1 = 0,$$
determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il vertice della parabola del fascio.

3. Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 - 2xz + 2kyz + z^2 - 2x + k - 1 = 0,$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dato che:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

concludiamo che le rette sono sghembe. Osserviamo che la retta r ha parametri direttori $(0, 1, -1)$ e la retta s $(1, 1, -1)$. Dunque, i parametri direttori (l, m, n) della retta cercata sono tali che:

$$\begin{cases} m - n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = n \\ l = 0. \end{cases}$$

Quindi, la retta cercata ha punto improprio $P_\infty = (0, 1, 1, 0)$. Essa, dunque, è intersezione dei piani π_1 e π_2 contenenti il punto P_∞ e, rispettivamente, la retta r e la retta s.

I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(y + z - 1) + \mu x = 0 \Rightarrow \lambda(y + z - t) + \mu x = 0.$$

Quando imponiamo il passaggio per P_∞ abbiamo $\lambda = 0$, per cui $\pi_1 \colon x = 0$.

I piani contenenti s hanno equazione:

$$\lambda(x - y - 1) + \mu(x + z - 3) = 0 \Rightarrow \lambda(x - y - t) + \mu(x + z - 3t) = 0.$$

Quando imponiamo il passaggio per P_∞ otteniamo $-\lambda + \mu = 0$, per cui $\pi_2 \colon 2x - y + z - 4 = 0$ e la retta cercata è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

2. Cominciamo con l'osservare che per $h = \infty$ abbiamo la conica spezzata $y(2x + y) = 0$. Inoltre:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -h & -1 \\ -h & -h & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -h^2 \quad \text{e} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & -h \end{vmatrix} = -h - h^2.$$

Dunque, per $h = 0$ abbiamo un'altra conica spezzata $(x + 1)^2 = 0$ e per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases} y(2x + y) = 0 \\ (x + 1)^2 = 0, \end{cases}$$

per cui abbiamo $(-1, 0)$ e $(-1, 2)$, entrambi contati due volte. Da $|A| = -h - h^2$ vediamo che per $-1 < h < 0$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = -1$ abbiamo una parabola e per $h < -1$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, tra le quali c'è l'equilatera per $h = 1$.

La parabola del fascio ha equazione $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0$. È semplice vedere che essa ha punto improprio $(1, 1, 0)$. Ciò vuol dire che l'asse di simmetria è parallelo alla retta $x - y = 0$, per cui le rette ortogonali all'asse hanno equazione $y = -x + k$. Tra tutte queste rette ce ne sarà una sola tangente alla parabola e lo sarà nel vertice:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 2(2k + 1)x + k^2 + 1 = 0 \\ y = x + k. \end{cases}$$

Vogliamo che:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow 4k - 3 = 0,$$

per cui $k = \frac{3}{4}$ e il vertice è dato da:

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x + \dfrac{25}{16} = 0 \\ y = x + \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{8} \\ y = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è $V = (-\frac{5}{8}, \frac{1}{8})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = k^2(2-k)$ e $|A| = -k^2$. Quindi, per $k = 2$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui per tale valore abbiamo un cono. Per $k = 0$ abbiamo $|B| = 0$, $|A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui abbiamo un cilindro.

Per $k \neq 0, 2$ abbiamo $|B| \neq 0$ e $|A| \neq 0$. Dato che $P_A(T) = -T^3 + 2T^2 + k^2T - k^2$, concludiamo subito che in tali casi abbiamo degli iperboloidi. In particolare, per $k > 2$ abbiamo degli iperboloidi ellittici e per $k < 2$, $k \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici.