CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria**- 18 Giugno 2018

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati il punto $P = (0, 1, 0)$ e le rette:

$$r\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

   (a) Determinare il piano α perpendicolare a s e passante per P.
   (b) Determinare la retta t passante per P e ortogonale a r e s.
   (c) Determinare la distanza $d(P, s)$.

2. Nel piano $z = 0$ sono dati i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, 2)$ e la retta $p\colon x + y - 3 = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per A e B e tangenti in C alla retta p. Detta Γ la conica del fascio tangente all'asse $\vec{y}$ in B, determinare gli assi di simmetria di Γ.

3. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} xy - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

   e i punti $P_1 = (1, 1, -1)$, $P_2 = (-1, -1, 1)$ e $P_3 = (2, \frac{1}{2}, -2)$.

Soluzione

1. La retta s ha parametri direttori $(1, -1, 0)$, per cui il vettore di componenti $(1, -1, 0)$ è ortogonale al piano α, che, dunque, ha equazione $x - y + 1 = 0$.

   Per determinare la retta t possiamo trovare il piano β passante per P e ortogonale a r, così che $t = \alpha \cap \beta$. Parametri direttori di r sono $(1, 1, 2)$, per cui $\beta\colon x + y + 2z - 1 = 0$ e:

$$t\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

   Infine, per determinare la distanza $d(P, s)$ occorre determinare il punto $H = \alpha \cap s$ e $d(P, s) = \overline{HP}$. Determiniamo H:

$$H = \alpha \cap s\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

   Dunque, $H = (0, 1, 2)$ e $d(P, s) = \overline{HP} = 2$.

2. Osservato che la retta AB ha equazione $x + y - 1 = 0$, la retta AC ha equazione $x = 1$ e la retta BC ha equazione $x - y + 1 = 0$, le coniche spezzate del fascio sono $AB \cup p$ e $AC \cup BC$, cioè sono le coniche di equazione $(x + y - 3)(x + y - 1) = 0$ e $(x - 1)(x - y + 1) = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$h(x-1)(x-y+1) + (x+y-3)(x+y-1) = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 + (2-h)xy + y^2 - 4x + (h-4)y + 3 - h = 0.$$

Sappiamo che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Questo significa che $|B| = 0$ solo per $h = 0$, per cui per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & \dfrac{2-h}{2} \\ \dfrac{2-h}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2+8h}{4}.$$

Dunque, per $h < 0$ e $h > 8$ abbiamo delle iperboli, tra le quali si ottiene l'equilatera per $h = -2$; per $h = 8$ abbiamo una parabola; per $0 < h < 8$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali non vi sono circonferenze.

Cerchiamo la retta tangente nel punto $B = (0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h+1 & \dfrac{2-h}{2} & -2 \\ \dfrac{2-h}{2} & 1 & \dfrac{h-4}{2} \\ -2 & \dfrac{h-4}{2} & 3-h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-1 - \frac{h}{2}\right) x + \left(\frac{h}{2} - 1\right) y - \frac{h}{2} + 1 = 0.$$

Questa retta coincide con l'asse $\vec{y}$: $x = 0$ per $h = 2$. Quindi, la conica cercata è quella di equazione:

$$3x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0,$$

che, per quanto visto in precedenza, è un'ellisse. Dato che in questa equazione $a_{12} = 0$, possiamo dire che gli assi di simmetria sono le rette parallele agli assi cartesiani che passano per il centro di simmetria. Dato che:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

vediamo che il centro di simmetria è dato da:

$$\begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

cioè esso è il punto $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ e gli assi di simmetria sono $x = \frac{2}{3}$ e $y = 1$.

3. Le quadriche contenenti la conica hanno equazione:

$$xy - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Quando imponiamo il passaggio per i punti P_1, P_2 e P_3 otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} -a - b + c - d = 0 \\ -a - b + c + d = 0 \\ -4a - b + 4c - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = a \\ d = 0, \end{cases}$$

per cui le quadriche cercate hanno equazione:

$$xy + axz + az^2 - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{a}{2} & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{a}{2} & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = \frac{a}{4}$ e $|A| = -\frac{a}{4}$. Osservato che le quadriche contengono tutte Γ, che è un'iperbole, nessuna di esse può essere un'ellissoide. Dunque, concludiamo subito che per $a > 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $a < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici. Inoltre, per $a = 0$ si vede facilmente che $|B| = |A| = 0$ e $\rho(B) = 3$, per cui in tal caso abbiamo un cilindro.