Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (J-Pr) e Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 16 Luglio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,0) &= (h+2, h+1, 2, 2h+1) \\ f(0,0,1,-1) &= (0, h-1, 1-h, 2h-2) \\ f(1,0,0,0) &= (1,1,1,1) \\ f(0,0,0,1) &= (1,1,h,2-h), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2. Dati $V = \mathscr{L}((0,0,0,1))$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0\}$, determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(W)$. Determinare, inoltre, la somma $f^{-1}(W) + V$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificando se essa è diretta o meno.

3. Dati $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0,\ x - y - z = 0\}$ e $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0,\ x + y - z = 0\}$, calcolare $f(U)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, il valore di h per il quale $f(U) = T$.

4. Sono assegnate le applicazioni lineare $p_1\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $p_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite, rispettivamente, da:

$$p_1(x,y,z,t) = (x, t, -x+t)$$

per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, e da:

$$p_2(x,y,z) = (x,y,z,0),$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Sia $g = p_1 \circ f \circ p_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Dalle condizioni date abbiamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+2, h+1, 2, 2h+1) \\ f(e_3) - f(e_4) = (0, h-1, 1-h, 2h-2) \\ f(e_1) = (1,1,1,1) \\ f(e_4) = (1,1,h,2-h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1,1,1,1) \\ f(e_2) = (h,0,0,h) \\ f(e_3) = (1,h,1,h) \\ f(e_4) = (1,1,h,2-h), \end{cases}$$

per cui:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 & h \\ 1 & h & h & 2-h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, per } h \neq 1} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & -h & h-1 & 0 \\ 0 & -h & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 1$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è $[(1,1,1,1),(1,h,1,h),(1,1,h,2-h)]$. La sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & h \\ 1 & 1 & h & 2-h \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (h-1)^2(-x-y+z+t) = 0,$$

per cui per $h \neq 1$ si ha $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+hy+z+t = 0,\ -hy+(h-1)z = 0,\ -hy+(h-1)t = 0\} = \\ = \mathscr{L}((-h^2-h, h-1, h, h)). \end{aligned}$$

Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,1,1,1),(1,0,0,1)]$. Determiniamo le sue equazioni cartesiane:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z-y & t-x \end{pmatrix},$$

per cui per $h = 0$ $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y-z = 0,\ x-t = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e si ha:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0,\ x+z+t = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,-1),(0,0,1,-1)).\}$$

2. Calcoliamo $f(x,y,z,t)$:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 & h \\ 1 & h & h & 2-h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+hy+z+t \\ x+hz+t \\ x+z+ht \\ x+hy+hz+(2-h)t \end{pmatrix},$$

per cui:

$$f(x,y,z,t) = (x+hy+z+t, x+hz+t, x+z+ht, x+hy+hz+(2-h)t).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+hy+z+t) - [x+hy+hz+(2-h)t] = 0\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-h)(z-t) = 0\}. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che per $h = 1$, $f^{-1}(W) = \mathbb{R}^4$, mentre per $h \neq 1$ $f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z-t = 0\}$.

Chiaramente, abbiamo che per $h = 1$ si ha $f^{-1}(W) + V = \mathbb{R}^4$, dove la somma non è diretta, in quanto $V \subset \mathbb{R}^4 = f^{-1}(W)$ e $V \cap f^{-1}(W) = V \neq \{(0,0,0,0)\}$. Invece, per $h \neq 1$, si vede facilmente che $(0,0,0,1) \notin f^{-1}(W)$, cosa che implica che $f^{-1}(W) \cap V = \{(0,0,0,0)\}$. Dunque, per $h \neq 1$ la somma è diretta e da:

$$\dim(f^{-1}(W) \oplus V) = \dim f^{-1}(W) + \dim V = 3 + 1 = 4,$$

otteniamo immediatamente che $f^{-1}(W) \oplus V = \mathbb{R}^4$.

3. Dato che $U = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,-1,0))$, abbiamo che:

$$f(U) = \mathscr{L}(f(1,0,1,0), f(0,1,-1,0)) = \mathscr{L}((2,h+1,2,h+1),(h-1,-h,-1,0)).$$

Osserviamo che per $h \neq -1$ la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & h+1 & 2 & h+1 \\ h-1 & -h & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 2, per cui certamente per $h \neq -1$ si ha $\dim f(U) = 2$. Per $h = -1$ abbiamo $f(U) = \mathscr{L}((2,0,2,0),(-2,1,-1,0))$. E, nuovamente, la matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, per cui anche per $h = -1$ si ha $\dim f(U) = 2$. Ciò vuol dire che $\dim f(U) = \dim T = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Per vedere quando $f(U) = T$, occorre vedere quando $(2,h+1,2,h+1),(h-1,-h,-1,0) \in T$, cioè quando verificano le sue equazioni cartesiane. Si vede facilmente che $(2,h+1,2,h+1) \in T$ per $h = -1$ e $(h-1,-h,-1,0) \in T$ per ogni h. Ciò vuol dire che $f(U) = T$ per $h = -1$.

4. Si vede facilmente che:

$$M(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$M(g) = M(p_1) \cdot M(f) \cdot M(p_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & h & 1 \\ 1 & 0 & 1 & h \\ 1 & h & h & 2-h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 1 & h & h \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h & 1 \\ 1 & h-T & h \\ 0 & 0 & h-1-T \end{vmatrix} = (h-1-T)[T^2 - (h+1)T].$$

Gli autovalori, perciò, sono 0, $h-1$ e $h+1$. Per $h \neq 1, -1$ essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 e possiamo concludere subito che g è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 2, con $m_0 = 2$ e $m_2 = 1$. Dato che certamente $\dim V_2 = 1 = m_2$ e che $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$, possiamo dire che g è semplice se $\dim V_0 = 2 = m_0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} g$:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\rho(M(g)) = 1$ e $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} g = 3 - 1 = 2 = m_0$ e concludiamo che g è semplice per $h = 1$.

Sia $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e -2, con $m_0 = 2$ e $m_{-2} = 1$. Dato che certamente $\dim V_{-2} = 1 = m_{-2}$ e che $1 \leq \dim V_0 \leq 2 = m_0$, possiamo dire che g è semplice se $\dim V_0 = 2 = m_0$. Sappiamo che $V_0 = \operatorname{Ker} g$:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui $\rho(M(g)) = 2$ e $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} g = 3 - 2 = 1 < 2 = m_0$ e concludiamo che g non è semplice per $h = -1$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Data le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
e dato il punto $P = (0, 1, 1)$, determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2. Nel piano $z = 0$ determinare e studiare il fascio di coniche tangenti in $A = (2, 1)$ alla retta $s\colon x - 2y = 0$ e in $B = (0, 2)$ all'asse $\vec{y}$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3. Data la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z^2 + x = 0, \end{cases}$$
determinare il cilindro e il cono entrambi contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V_1 = (0, 1, 0, 0)$ e $V_2 = (0, 1, 0)$.

Soluzione

1. È immediato vedere che la retta r ha parametri direttori $(0, 1, 1)$. Osserviamo, poi, che le rette cercate hanno equazioni del tipo:
$$\begin{cases} x = lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + nt. \end{cases}$$
Dunque, queste rette formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r se:
$$\frac{m+n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l^2 = 2mn.$$
Ricaviamo l, m e n dalle equazioni delle rette cercate:
$$l = \frac{x}{t},\ m = \frac{y-1}{t} \quad \text{e} \quad n = \frac{z-1}{t}.$$
Sostituendo troviamo:
$$\frac{x^2}{t^2} = 2\,\frac{y-1}{t} \cdot \frac{z-1}{t},$$
da cui si ottiene l'equazione del luogo cercato:
$$x^2 - 2(y-1)(z-1) = 0.$$

2. La retta AB ha equazione $x + 2y - 4 = 0$, per cui le coniche spezzate del fascio hanno equazioni $x(x - 2y) = 0$ e $(x + 2y - 4)^2 = 0$ e il fascio di coniche ha equazione:
$$hx(x - 2y) + (x + 2y - 4)^2 = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 + (4 - 2h)xy + 4y^2 - 8x - 16y + 16 = 0.$$
Sappiamo che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Ciò vuol dire che le coniche irriducibili si ottengono solo per $h \neq 0$. Da:
$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & 2-h \\ 2-h & 4 \end{vmatrix} = 8h - h^2,$$
vediamo che per $0 < h < 8$ abbiamo delle ellissi, tutte reali in quanto i punti base sono reali e nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata e per $h = 8$ abbiamo

una parabola; per $h < 0$ e $h > 8$ abbiamo delle iperboli, tra le quali si ottiene quella equilatera per $h = -5$. Quest'ultima ha equazione:

$$-4x^2 + 14xy + 4y^2 - 8x - 16y + 16 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 7xy + 2y^2 - 4x - 8y + 8 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{7}{2} & -2 \\ \frac{7}{2} & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -2x + \frac{7}{2}y - 2 = 0 \\ \frac{7}{2}x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{13} \\ y = \frac{12}{13}, \end{cases}$$

per cui $C = (\frac{8}{13}, \frac{12}{13})$.

3. Le quadriche contenenti la conica hanno equazione:

$$\begin{aligned} &z^2 + x + (x - y)(ax + by + cz + d) = 0 \\ &\qquad \Rightarrow ax^2 + (b - a)xy - by^2 + z^2 + cxz - cyz + (d + 1)x - dy = 0. \end{aligned}$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} a & \frac{b-a}{2} & \frac{c}{2} & \frac{d+1}{2} \\ \frac{b-a}{2} & -b & -\frac{c}{2} & -\frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & 1 & 0 \\ \frac{d+1}{2} & -\frac{d}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il cilindro cercato V_1 è vertice se:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \frac{b-a}{2} & \frac{c}{2} & \frac{d+1}{2} \\ \frac{b-a}{2} & -b & -\frac{c}{2} & -\frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & 1 & 0 \\ \frac{d+1}{2} & -\frac{d}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò vuol dire che:

$$\begin{cases} \frac{b-a}{2} = 0 \\ -b = 0 \\ -\frac{c}{2} = 0 \\ -\frac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0, \end{cases}$$

per cui il cilindro ha equazione $z^2 + x = 0$. Invece, per il cono V_2 è vertice se:

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & \frac{b-a}{2} & \frac{c}{2} & \frac{d+1}{2} \\ \frac{b-a}{2} & -b & -\frac{c}{2} & -\frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & 1 & 0 \\ \frac{d+1}{2} & -\frac{d}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò vuol dire che:

$$\begin{cases} \frac{b-a}{2} + \frac{d+1}{2} = 0 \\ -b - \frac{d}{2} = 0 \\ -\frac{c}{2} = 0 \\ -\frac{d}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0, \end{cases}$$

per cui il cono ha equazione $x^2 - xy + z^2 + x = 0$.