Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co, J-Pr) - Ingegneria Industriale (F-O) - Ingegneria Gestionale - Ingegneria Elettrica - Ingegneria Meccanica - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 10 Settembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,1,1)$, $v_3 = (3,2,2)$, $w_1 = (1,1,1)$ e $w_2 = (1,0,1)$. Data la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$, sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= hv_1 \\ f(v_2) &= -w_2 + hv_1 \\ f(v_3) &= w_1 - w_2 + hv_1 \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare $M(f)$ e $M^{\mathscr{A}}(f)$.
2. Studiare f, calcolando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, le equazioni cartesiane.
3. Studiare la semplicità di f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.
4. Nei casi in cui f è invertibile, determinare una matrice associata all'applicazione inversa f^{-1}.

Soluzione

1. Si vede facilmente che:

$$\begin{cases} f(1,1,0) = (h,h,0) \\ f(2,1,1) = (h-1,h,-1) \\ f(3,2,2) = (h,h+1,0) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} h-2 & 2 & 1-h \\ h-1 & 1 & 1-h \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, vediamo anche che:

$$\begin{aligned} [f(1,1,0)]_{\mathscr{A}} &= [(h,h,0)]_{\mathscr{A}} = (h,0,0) \\ [f(2,1,1)]_{\mathscr{A}} &= [(h+1,h,-1)]_{\mathscr{A}} = (h+1,-1,0) \\ [f(3,2,2)]_{\mathscr{A}} &= [(h,h+1,0)]_{\mathscr{A}} = (h+1,-2,1), \end{aligned}$$

per cui:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & h+1 & h+1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vediamo subito che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h$, per cui per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. Dunque, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   da cui è evidente che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una sua base è $[f(v_2), f(v_3)] = [(-1,0,-1),(0,1,0)]$. Dunque:
$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}.$$
   Inoltre, è anche evidente che:
$$\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(v_1) = \mathscr{L}((1,1,0)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z = 0\}.$$

3. Dato che:
$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & h+1 & h+1 \\ 0 & -1-T & -2 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (h-T)(-1-T)(1-T),$$
   gli autovalori sono h, 1, -1. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq \pm 1$, nel qual caso si ha $\dim V_h = \dim V_1 = \dim V_{-1} = 1$.

   Sia $T = h$. Dato che $f(1,1,0) = (h,h,0)$ e che $\dim V_h = 1$, concludiamo immediatamente che $V_h = \mathscr{L}((1,1,0))$. Sia $T = 1$. In tal caso, $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, con $f_1 = f - i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} h-1 & h+1 & h+1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   da cui segue che per $h \neq \pm 1$:
$$\begin{aligned} V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (h-1)a + (h+1)b + (h+1)c = 0,\ -2b - 2c = 0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,-b)\} = \mathscr{L}(v_2 - v_3) = \mathscr{L}((-1,-1,-1)). \end{aligned}$$
   Sia $T = -1$. In tal caso, $V_{-1} = \operatorname{Ker} f_{-1}$, con $f_{-1} = f + i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} h+1 & h+1 & h+1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   da cui segue che per $h \neq \pm 1$:
$$\begin{aligned} V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (h+1)a + (h+1)b + (h+1)c = 0,\ -2c = 0\} = \\ = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,-a,0)\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2) = \mathscr{L}((-1,0,-1)). \end{aligned}$$
   Quindi, per $h \neq \pm 1$ una base di autovettori è $[(1,1,0),(-1,-1,-1),(-1,0,-1)]$. Dal momento che essa è indipendente dal parametro h, possiamo affermare che essa è una base di autovettori per ogni $h \in \mathbb{R}$ e che f è, perciò, semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$. Essa è, pertanto, la base di autovettori cercata.

4. Posta $\mathcal{B} = [(1,1,0),(-1,-1,-1),(-1,0,-1)]$, per quanto visto in precedenza possiamo affermare che:
$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   f è invertibile quando è un isomorfismo, cioè per $h \neq 0$. In tal caso abbiamo:
$$M^{\mathscr{B}}(f^{-1}) = (M^{\mathscr{B}}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati i punti $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 0, 1)$ e il piano $\alpha\colon x + y - z = 0$, determinare le equazioni dei due piani passanti per A e B che formano con α un angolo di $\frac{\pi}{3}$.
2. Nel piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + y^2 - 2hx - 1 = 0,$$
determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il vertice della parabola del fascio tangente alla retta $4x - 4y + 5 = z = 0$.
3. Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2xy + 2y^2 + hz^2 - 2z + h = 0.$$

Soluzione

1. La retta AB ha equazioni:
$$AB\colon \begin{cases} x = 1 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$$
per cui i piani che la contengono hanno equazione $\lambda(x - 1) + \mu(y + z - 1) = 0$. Tali piani formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con α se i vettori di componenti (λ, μ, μ) e $(1, 1, -1)$ individuano un tale angolo:
$$\pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2\mu^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda^2 = 6\mu^2.$$
Dunque, $\lambda = \pm\sqrt{6}\mu$ e abbiamo i piani di equazioni $\sqrt{6}x + y + z - \sqrt{6} - 1 = 0$ e $\sqrt{6}x - y - z - \sqrt{6} + 1 = 0$.
2. Osserviamo subito che la conica nascosta ha equazione $x(y - 1) = 0$, per cui essa è spezzata. Inoltre, da:
$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & h & -h \\ h & 1 & 0 \\ -h & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$
concludiamo che essa è l'unica conica spezzata del fascio. Per determinare i punti base intersechiamo la conica spezzata con una qualsiasi conica del fascio:
$$\begin{cases} x(y - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$
da cui otteniamo i punti $(0, 1)$ contato 3 volte e $(0, -1)$ contato 1 volta. Inoltre, $|A| = 1 - h^2$, per cui per $-1 < h < 1$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali vi è una circonferenza per $h = 0$; per $h = \pm 1$ abbiamo delle parabole; per $h < -1$ e $h > 1$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

   Intersecando le coniche del fascio con la retta data abbiamo:
$$\begin{cases} y = x + \dfrac{5}{4} \\ x^2 + 2hxy + y^2 - 2hx - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + \dfrac{5}{4} \\ (2h + 2)x^2 + \dfrac{h + 5}{2}x + \dfrac{9}{16} = 0. \end{cases}$$
   Imponiamo che:
$$\Delta = \frac{1}{4}(h^2 - 8h + 7) = 0.$$

Otteniamo i valori $h = 1$ e $h = 7$. L'unico valore che corrisponde a una parabola è $h = 1$, per cui la parabola cercata ha equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$. Osservando tale parabola vediamo subito che il suo punto improprio è $(1, -1, 0)$ e che le rette ortogonali all'asse di simmetria sono paralleli a $y = x$. Dato che la retta data $y = x + \frac{5}{4}$ è parallela a tale retta ed è tangente alla parabola, il punto di tangenza è precisamente il vertice. Dunque, il vertice cercato è dato da:

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{5}{4} \\ 4x^2 + 3x + \dfrac{9}{16} = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo che il vertice è il punto $(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8})$.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -1 \\ 0 & 0 & -1 & h \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = h^2 - 1$ e $|A| = h$. Ciò porta a concludere subito che per $h = \pm 1$ abbiamo dei coni e per $h = 0$ abbiamo un paraboloide ellittico. Sia $h \neq \pm 1, 0$. Dal momento che:

$$P_A(T) = (h - T)(T^2 - 3T + 1),$$

dalla regola dei segni di Cartesio vediamo che gli autovalori di A sono concordi per $h > 0$ e sono discordi per $h < 0$, per cui per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi e per $h < 0$ degli iperboloidi. Questo ci porta a concludere che per $h < -1$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, per $-1 < h < 0$ abbiamo degli iperboloidi ellittici, per $0 < h < 1$ abbiamo degli ellissoidi reali e per $h > 1$ abbiamo degli ellissoidi immaginari.